Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

Nihanje

Sedma domača naloga pri predmetu Klasična fizika, letni semester 2022/2023
13. februar 2023, Ljubljana
Avtor: *Simon Bukovšek*

Naloge rešuj samostojno. Datum oddaje je četrtek, 23. februar 2023.

V tej nalogi obravnavamo dva predmeta: homogeno kroglo s polmerom r in polovico tanke sferične lupine s polmerom R. Velja $R > r$. Pri vseh nalogah zanemari upor in trenje, koeficient lepenja je vedno dovoljšen, da noben objekt ne spodrsava. Vsi odmiki so majhni, gravitacijski pospešek je g.

1. Najprej postavimo sferično lupino kot nepremično skledo in vanjo spustimo kroglo, da se prosto giblje.

   (a) (3 t) Kroglo rahlo izmaknemo iz ravnovesne lege. S kakšnim nihajnim časom zaniha?

   Rešitev: Potencialna energija na enoto mase krogle pri premiku za kot φ je

   $$w_p = g(R-r)(1-\cos\varphi) \approx g(R-r)\frac{\varphi^2}{2}. \qquad (1\text{ t})$$

   Kinetična energija na enoto mase je enaka

   $$w_k = (1+\beta)(R-r)^2\frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \qquad (1\text{ t})$$

   kjer je $\beta = 2/5$. Skupna energija na enoto mase je

   $$w = \frac{R-r}{2}(g\varphi^2 + (1+\beta)(R-r)\dot{\varphi}^2) = w_0(\omega^2\varphi^2 + \dot{\varphi}^2).$$

   Iz tega sledi, da je nihajni čas enak

   $$t_0 = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}. \qquad (1\text{ t})$$

   Možna je tudi rešitev s silami.

   (b) (1 t) Obravnavaj limitna primera, ko je $R \gg r$ in ko je $R - r = \varepsilon$, kjer $\varepsilon/r \ll 1$.

   Rešitev: Če velja $R \gg r$, imamo

   $$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}}, \qquad (1/2\text{ t})$$

   če pa je $R - r = \varepsilon$, pa velja

   $$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7\varepsilon}{5g}}. \qquad (1/2\text{ t})$$

2. Sedaj v prostoru fiksiramo kroglo in nanjo poveznemo polsfero, tako da je v ravnovesni legi vodoravno poravnana.

(a) (5 t) Polsfero rahlo dregnemo, da se izmakne iz ravnovsene lege. S kakšnim nihajnim časom zaniha?

Rešitev: Najprej izračunamo višino težišča polsfere

$$h = \frac{1}{2\pi R^2 \rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \sin\theta \, \rho R^2 \cos\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{R}{2}, \qquad (1/2 \text{ t})$$

in vztrajnostni moment okoli osi x

$$J_x' = \frac{m}{2\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\cos\theta)^2 \pi (R\cos\theta) R \, , d\theta = \frac{2}{3} m R^2. \qquad (1/2 \text{ t})$$

Rešitev 1: Nalogo bomo najprej reševali z navori. Naj bo φ kot med ravnovesnim in trenutnim stičiščem polsfere in krogle glede na središče krogle in kot θ med ravnovesnim in trenutnim stičiščem glede na središče polsfere. Velja $r\varphi = R\theta$ (1/2 t). Nas seveda zanima vztrajnostni moment okoli točke prijemališča, torej bomo dvakrat uporabili Steinerjev izrek:

$$J = J_x' - \frac{mR^2}{4} + m\left(R^2 + \frac{R^2}{4} + 2R\frac{R}{2}\cos\theta\right) = \frac{5}{3} m R^2 - mR^2 \cos\left(\varphi \frac{r}{R}\right) \approx \frac{2}{3} m R^2. \quad (1/2 \text{ t})$$

Zaradi predpostavke majhnih odmikov smo kosinus aproksimirali s $\cos x \approx 1$. Navor na točko stičišča deluje samo od sile teže polsfere in je enak:

$$M = mg(R\sin\varphi - R/2 \sin(\varphi - \theta)) \approx mg\frac{\varphi}{2}(R + r). \qquad (1 \text{ t})$$

Zapišimo Newtonow zakon:

$$M = -J \frac{d^2}{dt^2}(\varphi - \theta) = -J\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{r}{R}\right), \qquad (1 \text{ t})$$

$$\frac{2}{3} m R^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{2} g m (R + r) = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4R}\frac{R+r}{R-r}},$$

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{3g}\frac{R-r}{R+r}}. \qquad (1 \text{ t})$$

Rešitev 2: Podajmo še rešitev z energijami. Kote definiramo enako kot v prvi rešitvi $r\varphi = R\theta$ (1/2 t). V tem primeru nas zamina vztrajnostni moment v težišču:

$$J = J_x' - \frac{1}{4} m R^2 = \frac{5}{12} m R^2. \qquad (1/2 \text{ t})$$

Poglejmo si premik težišča v odvisnosti od kota odmika:

$$\Delta h(\varphi) = -(R - r)\cos\varphi + \frac{R}{2}\cos\left(\frac{\varphi(R-r)}{R}\right) + \left(\frac{R}{2} - r\right) \approx \frac{\varphi^2}{4} R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (1/2 \text{ t})$$

Premik v horizontalni smeri je enak

$$\Delta x(\varphi) = -(R - r)\sin\varphi + \frac{R}{2}\sin\left(\frac{\varphi(R-r)}{R}\right) \approx \frac{\varphi}{2}(r - R). \qquad (1/2 \text{ t})$$

Dobimo

$$w_p = g\Delta h(\varphi) = g\frac{\varphi^2}{4R}(R^2 - r^2), , \qquad (1/2 \text{ t})$$

$$w_{\text{trans}} = \frac{1}{2}\Delta\dot{x}(\varphi)^2 = \frac{1}{8}(R - r)^2\dot{\varphi}^2., \qquad (1/2 \text{ t})$$

in

$$W_{\rm rot} = \frac{1}{2}J(\dot\varphi - \dot\theta)^2 = \frac{1}{2}J\dot\varphi^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{5}{24}m\dot\varphi^2(R-r)^2. \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ t})$$

Skupna kinetična energija je

$$w_k = \frac{1}{3}\dot\varphi^2(R-r)^2.$$

Sledi

$$t_0 = 2\pi\,\frac{\varphi}{\dot\varphi}\sqrt{\frac{w_k}{w_p}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{3g}\frac{(R-r)^2}{R^2-r^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{3g}\frac{R-r}{R+r}}. \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ t})$$

(b) (1 t) Obravnavaj limitna primera, ko je $R \gg r$ in ko je $R - r = \varepsilon$, kjer $\varepsilon/r \ll 1$.

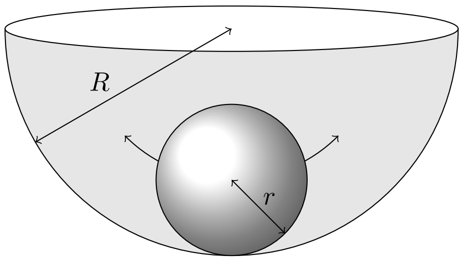
Rešitev: Če velja $R \gg r$, imamo

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{3g}}, \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ t})$$

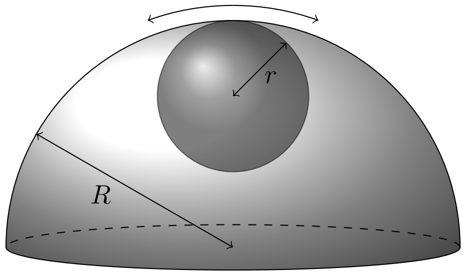
če pa je $R - r = \varepsilon$, pa velja

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3g}}. \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ t})$$

Naloga:	1	2	Skupno:
Možne točke:	4	6	10
Dosežene točke:			



(a) Skica k nalogi 1a.



(b) Skica k nalogi 2a.