Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

Elektrostatika

Enajsta domača naloga pri predmetu Klasična fizika, letni semester 2022/2023
25. april 2023, Ljubljana
Avtor: *Simon Bukovšek*

Naloge rešuj samostojno. Datum oddaje je četrtek, 4. maj 2023.

1. Dve neskončni enakomerno nabiti vzporedni žici tečeta vzporedno z osjo z na medsebojni razdalji $2a$, tako da je os točno na polovici med njima. Ena nosi dolžinsko gostoto naboja μ, druga pa $-\mu$. Za ničlo potenciala si izberi izhodišče.

   (a) (5 t) Določi potencial in električno polje poljubni točki $\vec{r} = (x, y, z)$.

Rešitev: Potencial ene žice je

$$U_1 = \frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r/a), \qquad (1\text{ t})$$

kjer je r dolžina vektorja od točke merjenega potenciala do žice. To formulo dobimo s pomočjo Gaussovega zakona po valju z osjo na žici. Sistem se v smeri z ne spreminja, zato bosta tudi polje in potencial odvisna samo od x in y koordinat. Velja $\vec{r} = (x \pm a, y, 0)$, kjer je predznak odvisen od tega, katero žico gledamo. Ko seštejemo potenciala obeh žic, dobimo

$$U = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right). \qquad (2\text{ t})$$

Rezultat je lahko obraten, če je študent vzel drugačno nabite žice. Električno polje ene žice (gledano v ravnini xy) je

$$\vec{E}_1(x,y,z) = \frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x\pm a, y, 0)}{(x\pm a)^2+y^2}, \qquad (1\text{ t})$$

kjer je $\vec{a} = (a, 0)$. Skupno polje je torej

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-a,y,0)}{(x-a)^2+y^2} - \frac{(x+a,y,0)}{(x+a)^2+y^2}\right). \qquad (1\text{ t})$$

To se da zapisati še nekoliko lepše:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mu a}{\pi\varepsilon}\frac{(x^2-y^2-a^2, 2xy, 0)}{(x^2-y^2-a^2)^2+(2xy)^2}.$$

   (b) (5 t) Dokaži, da so ekvipotencialne ploskve plašči neskončnih valjev. To naredi tako, da si izbereš nek potencial U_0 in določiš središče ter polmer valja, ki ga tvori ekvipotencialna ploskev.

Rešitev: Zapišemo

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right).$$

Dobimo

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = e^{\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\mu}} = \alpha. \qquad (1\text{ t})$$

To preoblikujemo v

$$x^2 - 2ax\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + a^2 + y^2 = 0, \qquad (1\ \text{t})$$

kar nam da enačbo kroga:

$$\left(x - a\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 + y^2 = a^2\frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2}. \qquad (2\ \text{t})$$

V enačbah lahko prepoznamo hiperbolične funkcije (ni pa nujno):

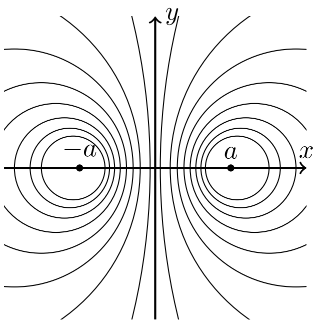
$$r = a\,\mathrm{csch}\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\mu}\right) \qquad (1/2\ \text{t})$$

in

$$x_0 = a\coth\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\mu}\right). \qquad (1/2\ \text{t})$$

(c) (3 t) Nariši polje $U(\vec{r})$ v ravnini xy kot izohipse ekvipotencialov.

Rešitev: Izohipse morajo biti krogi, ki niso koncentrični (1 t). Krogi se morajo proti žicama gostiti (1 t). Slika mora biti simetrična glede na os y (1 t).



2. (a) (5 t) Imamo naboj e_1 v točki $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$ in naboj $e_2 = -\frac{b}{a}e_1$ v točki $\vec{r}_2 = (b^2/a, 0, 0)$, kjer sta $a, b > 0$. Dokaži, da je električni potencial na sferi s polmerom b in središčem v izhodišču enak potencialu v neskončnosti.

Rešitev: Potencial je enak:

$$U(\vec{r}) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{b}{a}\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-b^2/a^2\vec{r}_1|}. \qquad (2\ \text{t})$$

V neskončnosti je potencial očitno enak nič, zato dokazujemo, da je tudi na sferi z radijem b enak nič. Dobimo:

$$U(\vec{r}) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1||\vec{r}-b^2/a^2\vec{r}_1|}(|\vec{r}-b^2/a^2\vec{r}_1| - b/a|\vec{r}-\vec{r}_1|). \qquad (1\ \text{t})$$

Dokazati moramo, da je $|\vec{r}-b^2/a^2\vec{r}_1| = b/a|\vec{r}-\vec{r}_1|$. Ker sta obe strani enačbi pozitivni, je lažje dokazati, da sta kvadrata obeh strani enačbe enaka. Upoštevamo, da je $|\vec{r}| = b$.

$$|\vec{r}-b^2/a^2\vec{r}_1| = r^2 - 2\frac{b^2}{a^2}\vec{r}\cdot\vec{r}_1 + \frac{b^4}{a^4}r_1^2 = b^2 - 2\frac{b^2}{a^2}\vec{r}\cdot\vec{r}_1 + \frac{b^4}{a^2}, \qquad (1\ \text{t})$$

$$(b/a)^2|\vec{r}-\vec{r}_1| = \frac{b^2}{a^2}r^2 - 2\frac{b^2}{a^2}\vec{r}\cdot\vec{r}_1 + \frac{b^2}{a^2}r_1^2 = \frac{b^4}{a^2} - 2\frac{b^2}{a^2}\vec{r}\cdot\vec{r}_1 + b^2. \qquad (1\ \text{t})$$

Kvadrata leve in desne strani sta res enaka, torej je potencial na tej sferi res enak nič. Možni so tudi drugačni pristopi, kakršnakoli popolna rešitev šteje 5 t.

(b) (13 t) Imamo prizemljeno nevtralno prevodno kroglo s polmerom R v izhodišču. S kolikšno silo deluje ta krogla na naboj e_0, ki je na razdalji r od izhodišča? Kolikšen bi bil privlak, če nevtralna krogla ne bi bila prizemljena? Kolikšen bi moral biti naboj na neprizemljeni prevodni krogli, da bi bila vsota električnih sil na naboj e_0 anaka nič? Uporabi ugotovitev iz prejšnjega dela.

Rešitev: Ker je krogla prizemljena, velja, da je na njenem površju električni potencial enak $U = 0$. Izkoristimo ugotovitev iz prejšnjega dela in kroglo zamenjajmo z nabojem $-(R/r)e_0$ na razdalji R^2/r od izhodišča (1 t). Privlak je

$$F_1 = \frac{e_0 \cdot (R/r)e_0}{4\pi\varepsilon_0(r - R^2/r)^2} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rr}{(r^2 - R^2)^2}. \qquad (2\ \text{t})$$

Če krogla ni prizemljena, mora biti skupen naboj na njej enak nič. Še vedno želimo, da je na sferi ekvipotencial, zato nam ostane le, da dodamo navidezen naboj $+(R/r)e_0$ v središče krogle (2 t). Privlačna sila je enaka:

$$F_2 = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rr}{(r^2 - R^2)^2} - \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^3} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\frac{2r^2 - R^2}{(r^2 - R^2)^2}. \qquad (3\ \text{t})$$

V zadnjem delu mora biti sila na e_0 enaka 0, zato moramo v središče krogle postaviti drugačen naboj kot prej:

$$F_3 = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rr}{(r^2 - R^2)^2} - \frac{e_0 e_3'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0. \qquad (2\ \text{t})$$

Dobimo, da je naboj v središču krogle enak

$$e_3' = e_0\frac{Rr^3}{(r^2 - R^2)^2}. \qquad (1\ \text{t})$$

Skupno je krogla torej nabita z nabojem:

$$e_3 = -e_0\frac{R}{r} + e_0\frac{Rr^3}{(r^2 - R^2)^2} = e_0\frac{R^3}{r}\frac{2r^2 - R^2}{(r^2 - R^2)^2}. \qquad (2\ \text{t})$$

(c) (7 t) [Bonus] Določi, za katera razmerja r/R je postavitev pri zadnjem delu prejšnje naloge (2. (b)) stabilna v radialni smeri. Določi, kako se na začetku spreminja oddaljenost od ravnovesne lege, če naboj malo (δ_0) izmaknemo iz ravnovesne lege. Masa delca je m. Predpostavi, da naboj po krogli lahko teče brez upora.

Rešitev: Označimo z r_0 ravnovesno lego. Sila na naboj na razdalji r je:

$$F = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Rr_0^3}{(r_0^2 - R^2)^2 r^2} - \frac{Rr}{(r^2 - R^2)^2}\right). \qquad (1\ \text{t})$$

Poglejmo si odvod sile po oddaljenosti:

$$\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4rR^2}{(r^2 - R^2)^3} - \frac{R}{(r^2 - R^2)^2} - \frac{2Rr_0}{(r_0^2 - R^2)^2 r^3}\right). \qquad (1\ \text{t})$$

V ravnovesni legi velja

$$\left.\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = \frac{e_0^2 R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0^2 + 3R^2}{(r_0^2 - R^2)^3} \qquad (1\ \text{t})$$

Vrednost tega je za $r > R$ pozitivna, zato so vse lege nestabilne. (Originalno navodilo je zahtevalo izračunati nihanji čas okoli stabilnih leg, vendar je bilo to nesmiselno. Za napako se opravičujem.) V bližini ravnovesne lege lahko pišemo

$$F(r) \approx F(r_0) + \left.\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0}(r - r_0). \qquad (1\ \text{t})$$

Velja $F(r_0) = 0$. Označimo $\delta = r - r_0$. Imamo

$$ma = m\ddot{\delta} = \delta \frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=r_0}, \quad (1\ \mathrm{t})$$

ki ima rešitev

$$\delta(t) = \delta_0 e^{kt}, \quad (1\ \mathrm{t})$$

kjer je

$$k = \sqrt{\frac{e_0^2 R}{4\pi\varepsilon_0 m} \frac{r^2 + 3R^2}{(r^2 - R^2)^3}}. \quad (1\ \mathrm{t})$$

Naloga:	1	2	Skupno:
Možne točke:	13	25	38
Dosežene točke:			