Mehanika kontinuov 2023/2024

2. kolokvij

12. junij 2024

1. Razsežen plavalni bazen polnimo s cevjo. S kolikšno silo in v kateri smeri delujemo na dno bazena, če konec cevi držimo $a = 0{,}25\,\mathrm{m}$ od dna, globoko pod gladino. Konec cevi obravnavajte kot točkast (tridimenzionalen) izvir, ki vodo brizga enakomerno na vse strani z izdatnostjo $Q = 0{,}5\,\mathrm{L\,s^{-1}}$. Vodo obravnavajte kot idealno tekočino.

2. Cilindrični reometer sestavljata dolg, vrtljiv valj s polmerom $r_1 = 5\,\mathrm{cm}$ in dolg, fiksen valjast plašč s polmerom $r_2 = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, med katerima je preiskovana viskozna tekočina. Notranji valj vrtimo s konstantno kotno hitrostjo ω. Pri strižni obremenitvi nekaterih kompleksnih tekočin z mikroskopsko plastovito strukturo naletimo na zanimiv pojav: pri dovolj močnem strigu se iz plasti začnejo oblikovati multilamelarne kroglice, takoimenovane čebulice. Kje hih bomo najprej opazili, če počasi večamo hitrost reometra? Določite kotno hitrost reometra, pri kateri bo meja med čebuličasto in plastovito fazo točno na sredini med valjema. Kritična strižna hitrost, pri kateri se začnejo tvoriti čebulice, je $0{,}01\,\mathrm{s^{-1}}$.

Rešitve

1. Rešitev za en sam točkast izvir v neskončni idealni tekočini lahko določimo že samo iz ohranitve mase in simetrijskih argumentov. Če izvir postavimo v izhodišče, lahko pišemo $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\,\hat{\mathbf{e}}_r$. Ko integriramo volumski pretok po poljubni sferi s središčem v izhodišču, dobimo
$$Q = 4\pi r^2 v(r),$$
iz česar sledi hitrostno polje
$$v(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$
To polje je brezvrtinčno in brez volumskih izvorov, torej zadošča Laplaceovi enačbi. Zaradi linearnosti Laplaceove enačbe, lahko posamezne rešitve seštevamo s superpozicijo. Upoštevati moramo robni pogoj $v_z(x, y, 0) = 0$. Če se prvi izvor nahaja na točki $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, lahko robni pogoj dosežemo, tako da dodamo navidezni izvor z enako izdatnostjo na točko $-\mathbf{a}$ in na koncu pozabimo na celotno rešitev na območju $z < 0$. Rešitev za tako postavljena izvora je
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^3}\right).$$
Bralec se lahko sam prepriča, da ta rešitev res zadošča robnemu pogoju. Za izračun sile na tla bazena bomo potrebovali tlak, za to pa hitrost ob dnu bazena. Zaradi simetrije, lahko slednjo obravnavamo v polarnih koordinatah (r, θ) in pričakujemo $v(r, \theta, z = 0) = v(r)\,\hat{\mathbf{e}}_r$. Od tu naprej oznaka r predstavlja dolžino polarnega vektorja na dnu bazena. Dobimo
$$v(r) = \frac{Q}{2\pi}\frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}}.$$
Za izračun tlaka uporabimo Bernoullijev zakon za stacionaren brezvrtinčen tok:
$$p(r) + \frac{\rho}{2}v(r)^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2}v_\infty^2 = 0,$$
oziroma
$$p(r) = -\frac{\rho Q^2}{8\pi^2}\frac{r^2}{(a^2 + r^2)^3}.$$
Skupna sila na dno bazena je
$$\begin{aligned}
F &= 2\pi\int_0^\infty p(r) r\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{\rho Q^2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(r^2 + a^2)^3} \\
&= -\frac{\rho Q^2}{4\pi}\int_a^\infty \frac{(u^2 - a^2)u\,\mathrm{d}u}{u^6} \\
&= -\frac{\rho Q^2}{4\pi}\left(-\frac{1}{2u^2} + \frac{a^2}{4u^4}\right)\Bigg|_a^\infty \\
&= -\frac{\rho Q^2}{16\pi a^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Ker je tlak ob dnu bazena negativen glede na neskončnost, vleče cev dno bazena, nekoliko neintuitivno, *proti sebi.* S cevjo delujemo na dno v pozitivni z smeri.

Elektrostatična primerjava: nalogo lahko rešimo v eni vrstici, če jo prepišemo v jezik elektrostatike. Potrebni zamenjavi sta $e \to Q\rho$ in $\varepsilon_0 \to \rho$. Sila med dvema nabojema na točkah $\mathbf{a}$ in $-\mathbf{a}$ je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2a)^2} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} \to \frac{\rho Q^2}{16\pi a^2}.$$

Edina težava je, da nam ta primerjava ne poda pravilne smeri sile.

2. Iz simetrijskih razlogov lahko sklepamo, da ima hitrostno polje obliko $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ z robnima pogojema $v(r_1) = \omega r_1$ in $v(r_2) = 0$. Iz istih razlogov lahko sklepamo, da je tlačno polje funkcija samo oddaljenosti od osi, zatorej bo njegov gradient kazal v radialni smeri. Zapišimo Navier-Stokesovo enačbo:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}^z.$$

Hitrostno polje je stacionarno, zato je prvi člen enak nič. Izkaže se, da za nalogo zadošča, če si pogledamo le φ komponento. Gradient tlaka kaže le v radialni smeri, zato k azimutalni komponenti ne prispeva, smerni odvod po tokovnici pa kaže v smeri pospeševanja delca vode – proti osi. Zunanja sila kaže v smeri z. V smeri φ nam tako ostane le en člen: $\nabla^2 v(r) = 0$. Za nestisljivo tekočino velja $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, zato lahko uporabimo zvezo $\nabla\times\nabla\times\mathbf{v} = -\nabla^2\mathbf{v}$, saj je laplacian v cilindričnih koordinatah nekoliko manj eleganten. Za komponento φ dobimo

$$\nabla^2\mathbf{v} = -\nabla\times\nabla\times\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right) = 0.$$

Z dvakratno integracijo prispemo do splošne rešitve

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}.$$

Robna pogoja nam določata konstante

$$A = \frac{\omega}{1-(r_1/r_2)^2}, \quad \text{in} \quad B = \frac{\omega}{r_1^{-2} - r_2^{-2}}.$$

Iskana komponenta tenzorja deformacijske hitrosti v cilindričnih koordinatah je

$$v_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{r^2} - A - \frac{B}{r^2}\right) = \frac{B}{r^2}.$$

Ker velja $B > 0$, bodo čebulice najprej nastale ob robu notranjega valja. Če želimo, da čebulice nastanejo točno na polovici med valjema, mora veljati $v_{\text{crit.}} = v_{r\varphi}(r_{1/2})$, torej

$$v_{\text{crit.}} = \frac{4\omega}{(r_1^{-2} - r_2^{-2})(r_1+r_2)^2}.$$

Sledi

$$\omega = \frac{v_{\mathrm{crit.}}}{4} \frac{(r_2^2 - r_1^2)(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{5}{576}\,\mathrm{s}^{-1} = 8{,}68 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} = 1{,}38\,\mathrm{mHz} = 5{,}0\,\mathrm{rph}.$$