Mehanika kontinuov 2023/2024

1. kolokvij

19. april 2024

1. Največ kolikšen sme biti tlak v *okrogli* jeklenki z notranjim polmerom $R_1 = 300\,\mathrm{mm}$ in debelino sten $b = 20\,\mathrm{mm}$, da se njena (notranja) prostornina ne bo povečala več kot za 0,1 %? Zunanji tlak in teža sta zanemarljiva. Youngov modul jekla je $E = 200\,\mathrm{GPa}$, Poissonovo razmerje pa $\sigma = 0{,}3$.

2. Alu folijo z debelino $h = 20\,\mu\mathrm{m}$ napnemo čez rob kozarca s premerom $2R = 10\,\mathrm{cm}$, tako da je frekvenca njenega osnovnega nihanja $\nu = 200\,\mathrm{Hz}$ (nihanje *napete* opne). Kolikšen je relativni popravek te frekvence, če upoštevamo upogibno elastičnost folije. Upoštevajte, da je popravek majhen, tako da so *dodatki* k obliki nihajnega načina napete opne zanemarljivi (znana enačba, ki opisuje elastičnost tanke opne, je višjega reda v krajevnem odvodu, zato ima dodatne rešitve). Za napeto opno z zanemarljivo elastičnostjo velja dinamična enačba

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{p}{\gamma} = 0,$$

kjer je u prečni odmik opne, γ njena površinska napetost (sila na enoto dolžine), $c^2 = \gamma/(\rho h)$, p pa prečna tlačna obremenitev opne (v našem primeru je ni). Gostota aluminija je $\rho = 2700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Youngov elastični modul $E = 70\,\mathrm{GPa}$, Poissonovo razmerje pa $\sigma = 0{,}35$.

Matematična pomoč: rešitvi Besselove diferencialne enačbe $u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + u(x) = 0$ sta Besselova in Neumanova funkcija, $u(x) = A\mathrm{J}_0(x) + B\mathrm{N}_0(x)$. Prva ničla $\mathrm{J}_0(x)$ je pri $x \approx 2{,}40$.

Rešitve

1. Rešujemo Navierovo enačbo:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^z + \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right).$$

Ker rešujemo za stacionarno stanje, velja $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, prav tako pa velja $\mathbf{f}^z = \mathbf{0}$, saj zanemarimo silo teže. Enačba se prepiše v

$$\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0.$$

Zaradi sferične simetrije in izotropnosti tlaka lahko za deformacijo uporabimo nastavek $\mathbf{u} = u(r)\,\hat{\mathbf{e}}_r$. Za ta nastavek velja $\nabla\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$, zato lahko izkoristimo zvezo

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{x}) = \nabla^2\mathbf{x} + \nabla\times\nabla\times\mathbf{x},$$

da še poenostavimo reševanje. Ko vstavimo $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})$, dobimo

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0.$$

V polarnih koordinatah se ta enačba glasi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u\right)\right) = 0.$$

Ko prvič integriramo in množimo z r^2, dobimo

$$\frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} = Ar^2,$$

kjer je A integracijska konstanta, po drugi integraciji pa prispemo do splošne rešitve

$$u(r) = \frac{A}{3}r + \frac{B}{r^2}.$$

Konstanti določimo iz robnih pogojev. Pri $r = R_1$ velja $\sigma_{rr}(R_1) = -p$, pri $r = R_1+b$ pa $\sigma_{rr}(R_1+b) = 0$. Po Hookovem zakonu velja

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{rr} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{kk}\right),$$

kjer je $u_{kk} = \mathrm{Tr}\,(\mathsf{u}) = \nabla\cdot\mathbf{u} = A$. Imamo še

$$u_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{A}{3} - \frac{2B}{r^3}.$$

Robna pogoja lahko torej zapišemo kot

$$-p = \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{A}{3} - \frac{2B}{R_1^3} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}A\right)$$

in

$$0 = \frac{A}{3} - \frac{2B}{(R_1+b)^3} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}A.$$

Iz drugega pogoja dobimo

$$2B = A(R_1+b)^3 \frac{1+\sigma}{3(1-2\sigma)}.$$

To vstavimo v prvi robni pogoj

$$A = \frac{3p(1-2\sigma)}{E}\left(\left(1+\frac{b}{R_1}\right)^3 - 1\right)^{-1} = \frac{3p(1-2\sigma)R_1^3}{E\left((R_1+b)^3 - R_1^3\right)},$$

iz tega pa dobimo še izraz za B:

$$B = \frac{p(1+\sigma)}{2E\left(R_1^{-3} - (R_1+b)^{-3}\right)} = \frac{p(1+\sigma)R_1^3(R_1+b)^3}{2E\left((R_1+b)^3 - R_1^3\right)}.$$

Skupen izraz za $u(r)$ je

$$u(r) = \frac{pR_1^3}{E\left((R_1+b)^3 - R_1^3\right)}\left((1-2\sigma)r + (1+\sigma)\frac{(R_1+b)^3}{2r^2}\right).$$

in

$$u(R_1) = \frac{pR_1^4}{E\left((R_1+b)^3 - R_1^3\right)}\left((1-2\sigma) + (1+\sigma)\frac{(R_1+b)^3}{2R_1^3}\right).$$

Navodila nam podajo tudi pogoj o maksimalnem volumskem raztezku:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1+\frac{u(R_1)}{R_1}\right)^3 - 1$$

oziroma

$$\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^3 - 1 = \frac{pR_1^3}{E\left((R_1+b)^3 - R_1^3\right)}\left((1-2\sigma) + (1+\sigma)\frac{(R_1+b)^3}{2R_1^3}\right).$$

Maksimalen dovoljen tlak v jeklenki je

$$p = \frac{E\left[(1+\Delta V/V)^3 - 1\right]\left[(1+b/R_1)^3 - 1\right]}{1-2\sigma + (1+\sigma)(1+b/R_1)^3/2} = 1{,}079 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} = 1079\,\mathrm{bar}.$$

V primeru tanke stene $b \ll R_1$ se izraz poenostavi v

$$p = \frac{2E}{1-\sigma}\frac{b}{R_1}\left[(1+\Delta V/V)^3 - 1\right].$$

2. Najprej poiščimo rešitev za napeto opno z zanemarljivo elastičnostjo. Predpostavljamo, da bo oblike

$$u(\mathbf{r},t) = e^{i\omega t} w(r),$$

kjer je $\omega = 2\pi\nu$ in $r = |\mathbf{r}|$. Ko ta nastavek vstavimo v enačbo za opno in odstranimo kompleksne eksponente, dobimo

$$\nabla^2 w + \frac{\omega^2}{c^2} w = 0.$$

V cilindričnih koordinatah je izraz za Laplacev operator za funkcijo, ki je odvisna samo od r

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}.$$

V izrazu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} w = 0$$

označimo $k = \omega/c$ in $x = kr$. Enačba se prepiše v obliko

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + w = 0,$$

za katero poznamo rešitev

$$w(x) = A\mathrm{J}_0(x) + B\mathrm{N}_0(x).$$

Ker opna v izhodišču nima singularnosti, mora veljati $B = 0$. Robni pogoj $u(R) = 0$ pa nam da $\mathrm{J}_0(kR) = 0$, oziroma $kR = x_0$, kjer je $x_0 = 2{,}40$ prva ničla Besselove funkcije. Obrnimo se nazaj k enačbi za opno. Če jo pomnožimo z γ, dobimo

$$\gamma\nabla^2 u = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}.$$

Desna stran je očitno masa (na enoto površine) krat pospešek, zato leva stran najbrž predstavlja neko silo. Če želimo upoštevati še upogibno elastičnost, moramo drugemu Newtonovemu zakonu dopisati še elastično silo $K\nabla^2\nabla^2 u$:

$$\gamma\nabla^2 u = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\nabla^2\nabla^2 u.$$

Reševanja se lotimo z nastavkom

$$u(\mathbf{r},t) = e^{i(\omega+\Delta\omega)t} w(r),$$

kjer je krajevni del kar enak rešitvi od prej. Spet vstavimo nastavek in pokrajšamo kompleksne eksponente:

$$\gamma\nabla^2 w = -\rho h(\omega+\Delta\omega)^2 w + \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\nabla^2\nabla^2 w.$$

Krajevni del je lastna funkcija Laplacevega operatorja, zato velja $\nabla^2 w = -k^2 w$ in $\nabla^2\nabla^2 w = k^4 w$. To vstavimo in pokrajšamo w:

$$\rho h(\omega + \Delta\omega)^2 = k^2\gamma + \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}k^4.$$

Delimo z ρh

$$(\omega + \Delta\omega)^2 = k^2 c^2 + \frac{Eh^2k^4}{12\rho(1-\sigma^2)} = \omega^2 + \frac{Eh^2x_0^4}{12\rho R^4(1-\sigma^2)}.$$

Popravek je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \sqrt{1 + \frac{Eh^2x_0^4}{12\omega^2\rho R^4(1-\sigma^2)}} - 1 \approx \frac{Eh^2x_0^4}{96\pi^2\nu^2\rho R^4(1-\sigma^2)} = 1{,}66\cdot 10^{-3},$$

kar ustreza $\Delta\nu \approx 0{,}33\,\mathrm{Hz}$.