Matematična fizika 1

# 4. domača naloga

2023/2024

Četrt metra dolga palica s presekom $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$ je iz enoosne snovi, rezane tako, da os palice sovpada z glavno smerjo z $\mu_1 = 1{,}0005$, v prečni smeri pa sta lastni vrednosti $\mu_2 = 1{,}0002$. Palico ukrivimo v krožni lok s središčnim kotom $50^\circ$ in jo postavimo v dolgo tuljavo tako, da je os tuljave tangenta na palico v enem izmed krajišč. V tuljavi je homogeno magnetno polje z gostoto $0{,}1\,\mathrm{T}$. Določi navor na palico!

## Rešitev

Podatki: $l = 0{,}25\,\mathrm{m}$, $S = 0{,}5\,\mathrm{cm}^2$, $B_0 = 0{,}1\,\mathrm{T}$, $\mu_1 = 1{,}0005$, $\mu_2 = 1{,}0002$, $\alpha = 50^\circ$. Naj bo magnetno polje $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Navor na delček palice je

$$\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathrm{d}\mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = \mathrm{d}V \underline{\underline{\chi}}\mathbf{H} \times \mathbf{B} = S\,\mathrm{d}l(\underline{\underline{\mu}} - 1)\mathbf{H} \times \mathbf{B} = \frac{S\,\mathrm{d}l}{\mu_0}(\underline{\underline{\mu}} - 1)\mathbf{B} \times \mathbf{B}.$$

V tuljavi je namreč $\mu = 1$, zato je tudi znotraj palice $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. Ker velja $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0$, lahko zapišemo

$$\mathrm{d}\mathbf{M} = \frac{S\,\mathrm{d}l}{\mu_0}(\underline{\underline{\mu}}\mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

pri čemer je

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{bmatrix}$$

v lastnem sistemu palice, pri čemer je palica usmerjena v smer $z$. Zadosti je, da se omejimo samo na dimenziji $y$ in $z$. V koordinatnem sistemu delčka palice, ki je glede na tuljavo zasukan za kot $\varphi$, ima vektor magnetnega polja komponente

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_0 \sin\varphi \\ B_0 \cos\varphi \end{bmatrix}_\varphi .$$

Pri tem indeks ob vektorju označuje, da je koordinatni sistem okoli osi $x$ zavrten za kot $\varphi$ glede na tuljavo. Pomnožimo z inverzom permeabilnostnega tenzorja

$$\underline{\underline{\mu}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_0\mu_2 \sin\varphi \\ B_0\mu_1 \cos\varphi \end{bmatrix}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(\mu_2 - \mu_1)\sin\varphi\cos\varphi \\ B_0\mu_1\cos^2\varphi + B_0\mu_2\sin^2\varphi \end{bmatrix}.$$

Imamo

$$(\underline{\underline{\mu}}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mu_2 - \mu_1)B_0^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}.$$

Skupen navor je

$$\mathbf{M} = \frac{B_0^2 Sl(\mu_2 - \mu_1)\hat{\mathbf{x}}}{\mu_0\alpha}\int_0^\alpha \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{SlB_0^2(\mu_2 - \mu_1)\sin^2\alpha}{2\mu_0\alpha}\hat{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1{,}003 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$