Matematična fizika 1

3. domača naloga

2023/2024

Za nestatične porazdelitve nabojev nam električni potencial podaja izraz

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}',$$

kjer je $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ tako imenovan *retardiran čas*. Določi $\Box U$.

Operator *škatla* oziroma *d'Alembertov operator* je definiran kot

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Namig: poskusi najprej izračunati $\nabla^2 U$. Če gre vse po sreči, dobiš časovni odvod zraven zastonj. Pazljivo pri odvajanju integranda po kraju – tudi števec je odvisen od $\mathbf{r}$.

Rešitev

Upoštevajmo namig in izračunajmo $\nabla^2 U$. Paziti moramo, da so vsi odvodi glede na spremenljivko $\mathbf{r}$, zatorej v celotni rešitvi velja $\nabla = \nabla_\mathbf{r}$. Najprej poiščemo gradient

$$4\pi\varepsilon_0 \nabla U = \int_V \nabla \left(\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \int_V \left[\frac{\nabla \rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \rho \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] \mathrm{d}^3\mathbf{r}'.$$

Drugi člen je enostaven

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

pri prvem členu pa moramo biti malo pazljivi:

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t_r} \nabla t_r = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}.$$

Pri tem smo z $\dot{\rho}$ označili parcialni odvod gostote po času in upoštevali $\partial/\partial t_r = \partial/\partial t$. Dobili smo

$$4\pi\varepsilon_0 \nabla U = -\int_V \left(\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \rho \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{r}'.$$

Sedaj si poglejmo še divergenco:

$$\begin{aligned}
4\pi\varepsilon_0 \nabla^2 U &= -\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \rho \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= -\int_V \left\{ \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot (\nabla \dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \right] + \right. \\
&\qquad \left. + \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] \right\} \mathrm{d}^3\mathbf{r}'
\end{aligned}$$

Veljajo še naslednje zveze

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{-\ddot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2},$$

in

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

To vstavimo v integral

$$\begin{aligned}
4\pi\varepsilon_0 \nabla^2 U &= -\int_V \left\{ \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot \left(\frac{-\ddot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{\dot{\rho}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] + \right. \\
&\qquad \left. + \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + 4\pi\rho\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \right\} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= \int_V \left(\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 4\pi\rho\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' - 4\pi\rho(\mathbf{r}, t_r(\mathbf{r} = \mathbf{r}')) \\
&= \frac{4\pi\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 4\pi\rho(\mathbf{r}, t).
\end{aligned}$$

Ko smo integrirali δ-funkcijo smo pogoj $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ vstavili v krajevni in časovni del gostote. Pri krajevnem delu dobimo očitno $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, pri časovnem delu pa dobimo $t_r = t$. Če obrnemo enačbo, sledi

$$\Box U(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}.$$

Zanimivo je, da v enačbi nikjer več ne nastopa retardiran čas.