Matematična fizika 1

2. domača naloga

2023/2024

Dolg raven trak iz dielektrika, širok $2a$, je enakomerno postut z električnim nabojem, ploskovna gostota je σ.

a) Nad njegovo sredino v višini z je vzporedno s trakom napeta enakomerno naelektrena dielektrična nitka, linearna gostota je λ. Kolikčna je sila nadolžinsko enoto med obema dielektrikoma?

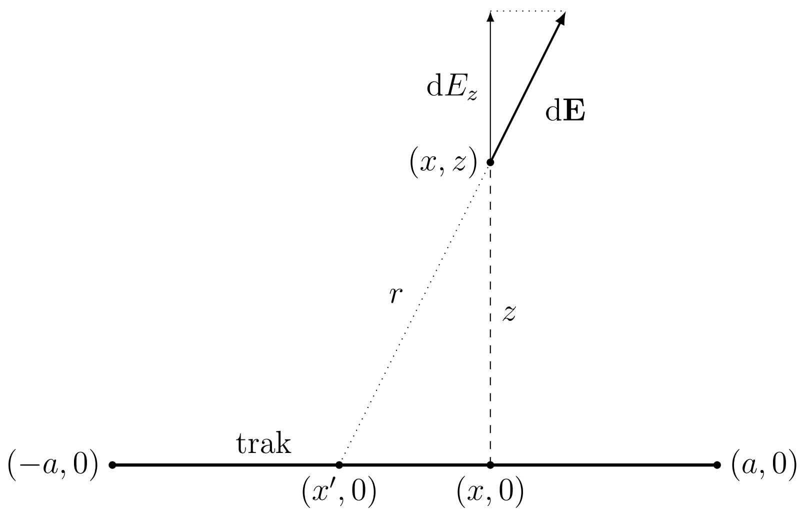
b) Kolikšna je sila na drug, enak trak, ki ga napnemo nad prvim v vzporedni ravnini?

Rešitev

a) Iz klasične fizike se spomnimo električnega polja neskončne žice, nabite z dolžinsko gostoto naboja λ:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{1}$$

Trak si lahko predstavljamo kot mnogo vzporednih nabitih žic z dolžinsko gostoto naboja $\sigma\,\mathrm{d}x$. Za izračun sile na zgornjo žico bomo potrebovali električno polje traku. Označimo koordinatni sistem, tako da smer y kaže v smeri traku, smer z pravokotno na trak, smer x pa v smeri debeline traku. Ker je sistem invarianten na premike v smeri y (vzdolž traku), vemo, da bodo vse sile kazale v ravnini xz. Še več – ker sta tako žica v nalogi a) ter trak v nalogi b) centrirana glede na središče spodnjega traku, bodo vse sile kazale samo v smeri z. Izračunajmo komponento z električnega polja traki v poljubni točki (x, z) nad trakom. V prvem delu naloge bomo potrebovali le polje v točki $(0, z)$, vendar nam bo splošnejši primer koristil v drugem delu. Polje bomo izračunali kot prispevek mnogo vzporednih žic z dolžinsko gostoto $\sigma\,\mathrm{d}x$, ki se nahajajo med koordinatama $(-a, 0)$ in $(a, 0)$.



Naj se taka namišljena nabita žica nahaja na koordinati $(x', 0)$. Razdalja od nje do naše izbrane točke (x, z) je $r = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$. Velikost električne sile izračunamo po formuli (1), za velikost komponente z pa pa moramo ta faktor pomnožiti z z/r. Skupna velikost električnega polja $E_z(x, z)$ je

$$E_z = \int \mathrm{d}E_z = \int_{-a}^{a} \frac{\sigma \, \mathrm{d}x'}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{z}{r} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{z \, \mathrm{d}x'}{(x - x')^2 + z^2}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = x' - x$ in dobimo

$$E_z = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-a-x}^{a-x} \frac{z \, \mathrm{d}u}{u^2 + z^2} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \left[\arctan\left(\frac{x + a}{z}\right) - \arctan\left(\frac{x - a}{z}\right) \right].$$

V prvem delu nas zanima le vrednost

$$E_z(0, z) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right).$$

Sila na enoto dolžine je enaka

$$\frac{F}{\ell} = E_z \lambda = \frac{\sigma\lambda}{\pi\varepsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right).$$

Poglejmo si dva skrajna primera. Za $z \gg a$ dobimo

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\sigma\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{a}{z}.$$

Če označimo $\lambda' = 2\sigma a$, lepo vidimo, da ta izraz predstavlja silo med dvema nabitima žicama. Če je trak dovolj oddaljen, se obnaša kot nabita žica. V drugem primeru $z \ll a$ imamo

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{z}{a}\right).$$

Prvi člen je preprosto sila med žico in neskončno nabito površino, drugi člen pa je popravek za dejstvo, da trak ni zares neskončna plošča.

b) Za primer dveh neskončnih trakov moramo sešteti prispevke sil po celotni širini zgornjega traku:

$$\frac{F}{\ell} = \int_{-a}^{a} \sigma E_z(x,z)\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\left[\arctan\left(\frac{x+a}{z}\right) - \arctan\left(\frac{x-a}{z}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

V tem primeru nam koristi, če uvedemo brezdimenzijske količine $u = x/z$ in $\xi = a/z$. Integral prepišemo v

$$\frac{F}{\ell} = \frac{z\sigma^2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\xi}^{\xi}(\arctan(u+\xi) - \arctan(u-\xi))\,\mathrm{d}u.$$

Za rešitev integrala pogledamo v primerno tabelo z integrali

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{\xi}(\arctan(u+\xi) - \arctan(u-\xi))\,\mathrm{d}u =& \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(u-\xi)^2+1}{(u+\xi)^2-1}\right)\\ &+ (u+\xi)\arctan(u+\xi)\\ &- (u-\xi)\arctan(u-\xi) + C.\end{aligned}$$

Ko vstavimo meje, dobimo

$$\begin{aligned}\frac{F}{\ell} &= \frac{z\sigma^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(4\xi\arctan(2\xi) - \ln(4\xi^2+1)\right)\\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(4a\arctan\left(\frac{2a}{z}\right) - z\ln\left(\frac{4a^2}{z^2}+1\right)\right).\end{aligned}$$

Poglejmo si še limitne primere. Za $z \gg a$ velja

$$\frac{F}{\ell} = \frac{2\sigma^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{z},$$

kar predstavlja silo med dvema žicama z dolžinsko gostoto naboja $2\sigma a$. Za $z \ll a$ imamo

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\sigma^2 a}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1 + \ln 2 + \ln(a/z)}{\pi} \frac{z}{a}\right).$$

Prvi člen je odboj med dvema neskončnima ploščama na razdalji a, drugi člen pa je popravek, ker trakova nista zares plošči.