Matematična fizika 1

1. domača naloga

2023/2024

V projektu Auger gradijo velik detektor za mione v ultranergijskih kozmičnih pljuskih. Detektor ima v načrtu obliko na tleh sledeče polkrogle z radijem 20 m in je sestavljen iz izmeničnih vodoravnih slojev aluminijeve pločevine z debelino 4 mm in aerogela z debelino 6 mm. Gostota aluminija je $2{,}7 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, aerogela pa $100\,\mathrm{kg/m^3}$. Aerogel pa se zaradi velike poroznosti zlahka elastično deformira, njegov elastični modul je $2 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$, aluminijeve plošče so pa v primerjavi z njim toge. Za koliko je prava višina detektorja manjša od načrtovane?

Namig: aluminijeve plošče so tako toge, da je tlak v detektorju odvisen samo od višine in nič od prečnih koordinat.

Rešitev

Podatki: $R = 20\,\mathrm{m}$, $d_{\mathrm{Al}} = 4\,\mathrm{mm}$, $d_{\mathrm{ag}} = 6\,\mathrm{mm}$, $E_{\mathrm{ag}} = 2 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$, $\rho_{\mathrm{Al}} = 2{,}7 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\mathrm{ag}} = 100\,\mathrm{kg/m^3}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Ker so debeline plošč zelo majhne v primerjavi z dimenzijo celotne polkrogle, lahko nalogo rešimo, kot bi bila celotna naprava sestavljena iz zvezne snovi z neko efektivno gostoto ρ_{e} in efektivnim elastičnim modulom E_{e}. Nova gostota je tako enaka

$$\rho_{\mathrm{e}} = \frac{d_{\mathrm{Al}}\rho_{\mathrm{Al}} + d_{\mathrm{ag}}\rho_{\mathrm{ag}}}{d_{\mathrm{Al}} + d_{\mathrm{ag}}} = 1140\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Za izračun efektivnega elastičnega modula upoštevamo $E_{\mathrm{Al}} = \infty$:

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{d_{\mathrm{Al}} + d_{\mathrm{ag}}}{d_{\mathrm{Al}}/E_{\mathrm{Al}} + d_{\mathrm{ag}}/E_{\mathrm{ag}}} = 3{,}333 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}.$$

Označimo z u skrček materiala. Po Hookeovem zakonu velja

$$\frac{F}{S} = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},$$

kjer z označuje oddaljenost od vrha polkrogle. Pri tem ne smemo pozbiti, da velja tudi $F = F(z)$ in $S = S(z)$. Površino na višini z lahko enostavno izrazimo kot

$$S(z) = \pi r(z)^2 = \pi(2Rz - z^2).$$

Za silo moramo izračunati sledeči integral:

$$F(z) = gm(z) = g\int_0^z \rho_\mathrm{e}\pi(2R\zeta - \zeta^2)\,\mathrm{d}\zeta = \pi\rho_\mathrm{e}g(Rz^2 - z^3/3).$$

Za diferencial skrčka dobimo

$$\mathrm{d}u = \frac{F(z)}{S(z)E_\mathrm{e}}\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_\mathrm{e}g}{3E_\mathrm{e}}\frac{z(3R-z)}{2R-z}\,\mathrm{d}z.$$

Raztezek integriramo od 0 do u_0, desno stran pa od 0 do R. Imamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{z(3R-z)}{2R-z}\,\mathrm{d}z &= R\int_0^R \frac{z}{2R-z}\,\mathrm{d}z + \int_0^R z\,\mathrm{d}z \\
&= -R\int_{2R}^R \frac{2R-t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}R^2 \\
&= -R\left(2R\ln t\Big|_{2R}^{R} - t\Big|_{2R}^{R}\right) + \frac{R^2}{2} \\
&= R^2(2\ln 2 - 1/2)
\end{aligned}$$

Dobimo

$$u_0 = \frac{\rho_\mathrm{e}R^2g}{6E_\mathrm{e}}(4\ln 2 - 1) = \underline{\underline{3{,}96 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}}}.$$

Zanimivo bi se bilo vprašati, koliko napake smo naredili z zveznim približkom. Recimo, da sta v resnici zaporedni plošči aluminija in aerogela enako veliki. Imamo

$$u_0 = \sum_{n=1}^{N}\Delta u(n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{d_\mathrm{ag}m(n)g}{E_\mathrm{ag}S(n)}.$$

Pri tem velja $d = d_\mathrm{ag} + d_\mathrm{Al} = 1\,\mathrm{cm}$ in $N = R/d = 2000$. Površina v odvisnosti od indeksa se izraža kot

$$S(n) = \pi(2Rdn - (dn)^2),$$

masa v odvisnosti od indeksa pa se izraža kot

$$m(n) = \sum_{i=1}^{n} S(i)(\rho_{\mathrm{Al}} d_{\mathrm{Al}} + \rho_{\mathrm{ag}} d_{\mathrm{ag}}).$$

Z zelo natančnim izračunom, pri čemer pazimo, da računamo z dovolj decimalnimi mesti, dobimo

$$\begin{aligned} u_0^{\mathrm{diskretno}} &= 0{,}000\,396\,583\,\mathrm{m}, \\ u_0^{\mathrm{zvezno}} &= 0{,}000\,396\,471\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Z zveznim približkom smo torej naredili relativno napako $2{,}8 \times 10^{-4}$.