Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Teoretična astrofizika

Prva domača naloga

Simon Bukovšek, 28211067

Mainz, 19. november 2023

Profesor: doc. dr. Dunja Fabjan
Asistent: asist. dr. Gregor Traven

Analiza Lane-Emdenove enačbe in politropnih modelov zvezd

1 Uvod

Enačbe zvezdne strukture v splošnem ne moremo rešiti analitično, temveč se moramo poslužiti numeričnega modeliranja. Vseeno je mogoče mehanski del enačb zvezdne strukture rešiti ločeno od energijskih enačb, če je le zveza med tlakom in gostoto v zvezdi dovolj preprosta. Če privzamemo enostavno zvezo med tlakom in gostoto $p = K\rho^\gamma$, lahko izpeljemo t.i. Lane-Emdenovo enačbo:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\theta^n,$$

kjer je $\rho(r) = \rho_c\theta^n(r)$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$, $r = \alpha\xi$ in

$$\alpha = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}.$$

Zvezdnemu modelu s privzeto odvisnostjo med tlakom in gostoto pravimo politropni model.

2 Analitične rešitve

Za politropna indeksa $n = 0$ in $n = 1$, smo že na vajah pokazali, da sta rešitvi enaki:

$$\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

in

$$\theta_1(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}.$$

Pokažimo, da je rešitev Lane-Emdenove enačbe za $n = 5$ enaka:

$$\theta_5(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/3}}.$$

Odvod je enak:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{3(1+\xi^2/3)^{3/2}}.$$

Ko to pomnožimo s ξ^2 in še enkrat odvajamo, dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{-\xi^3}{3(1+\xi^2/3)^{3/2}} = \frac{(1+\xi^2/3)^{1/2}\xi^4 - 3\xi^2(1+\xi^2/3)^{3/2}}{3(1+\xi^2/3)^3}$$
$$= \frac{\xi^4 - 3\xi^2 - \xi^4}{3(1+\xi^2/3)^{5/2}} = -\xi^2\theta(\xi)^5.$$

3 Numerične rešitve

Ker je numerično najlažje računati s prvimi odvodi, Lane-Emdenovo enačbo preoblikujemo v sistem dveh enačb prvega reda:

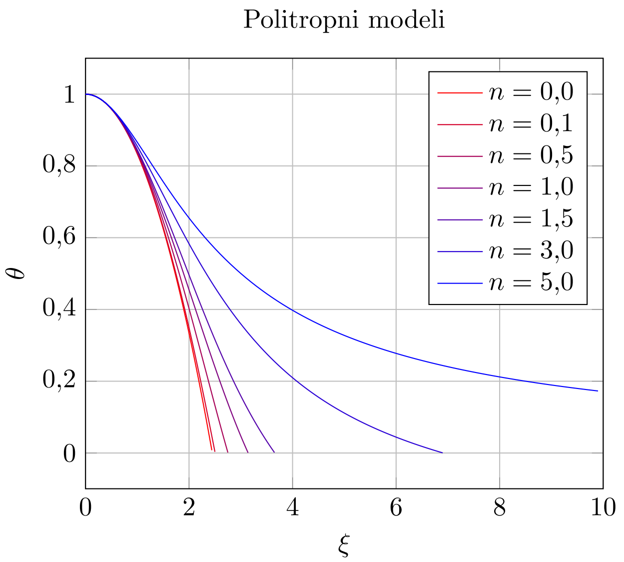
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{2}{\xi}y - \theta^n,$$

z začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $\xi(0) = 1$. Uporabil sem metodo `solve_ivp` iz knjižnice `scipy.integrate` v programskem jeziku `Python`. Rezultati so prikazani na Tabeli 1. Ker rešitev pri $n = 5$ ne seka osi x, nisem mogel izračunati danih podatkov. Vrednosti D_n in M_n sem izračunal po enačbah:

$$D_n = \frac{\xi_1}{3\theta'(\xi_1)}, \qquad M_n = \xi_1^2\theta'(\xi_1).$$

n	ξ_1	$\theta'(\xi_1)$	D_n	M_n
0,0	2,449	−0,816	1,500	4,899
0,1	2,504	−0,736	1,629	4,613
0,5	2,753	−0,500	2,180	3,789
1,0	3,142	−0,318	3,001	3,141
1,5	3,657	−0,203	4,049	2,710
3,0	6,910	−0,042	10,277	2,017
5,0	/	/	/	/

Tabela 1: Zbrani rezultati numeričnih modelacij za različne n.



Slika 1: Prikazi različnih politropnih modelov.

Ničel ni bilo težko dobiti, saj se integrator sam ustavi, ko prvič doseže ničlo. Odvodi pa so še bolj enostavni, saj integrator poleg vrednosti funkcije vrne tudi odvode. Vrednosti za $n = 0$ in $n = 1$ se ujemajo z analitičnimi napovedmi. Vsi profili so narisani na Sliki 1.
Osredotočimo se sedaj bolj podrobno na $n = 1{,}5$ (enoatomni plin) in $n = 3$ (degeneriran relativistični plin). Zanimajo nas predvsem tlak p, gostota ρ, masa M_r in temperatura T v odvisnosti od oddaljenosti od središča r. Vse količine bomo izražali v brezdimenzijskih enotah, ki se izražajo takole:

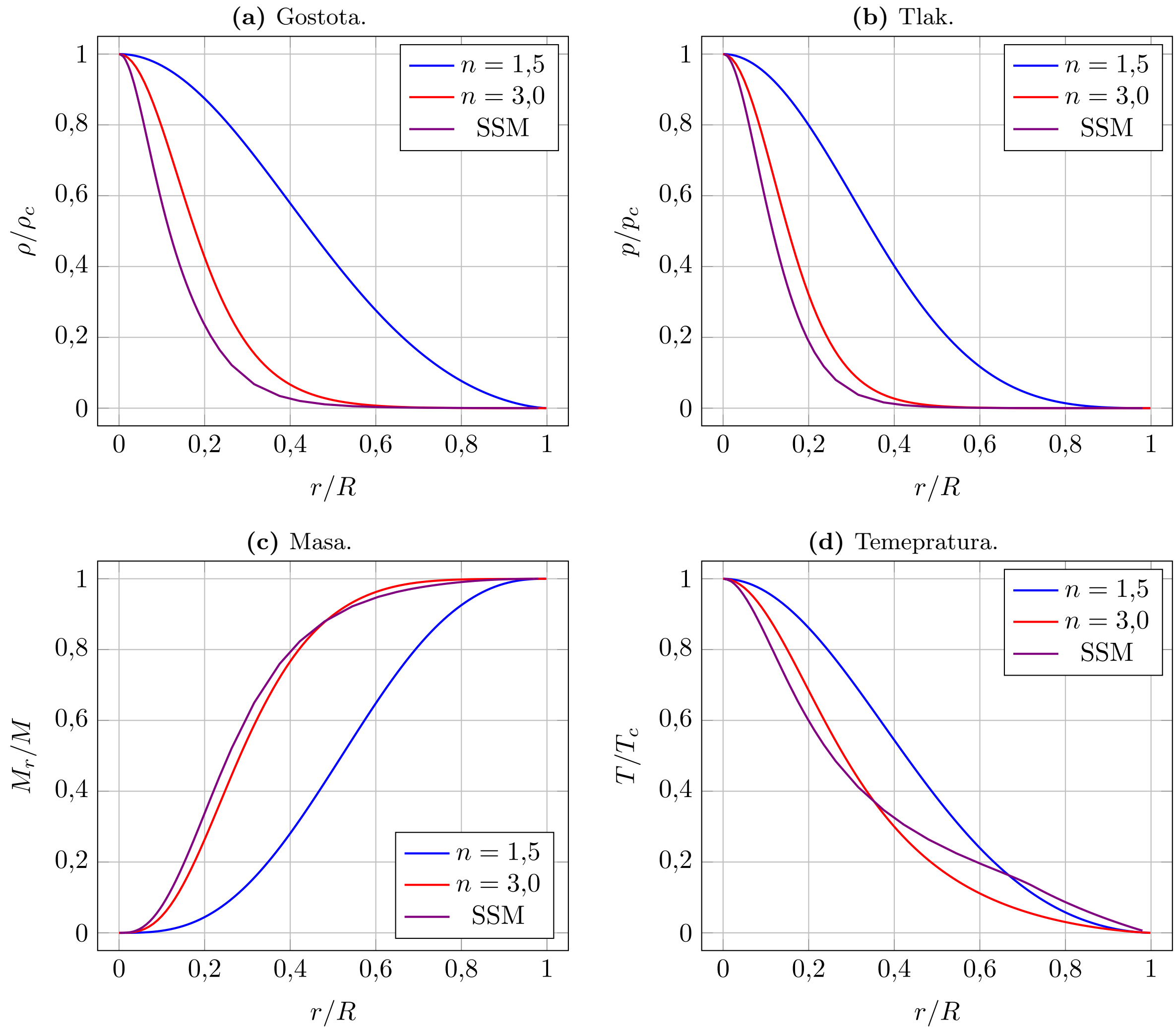
$$r/R = \xi/\xi_0, \quad \rho/\rho_c = \theta^n, \quad p/p_c = \theta^{n+1}, \quad M_r/M = \frac{\xi^2\theta'(\xi)}{\xi_1^2\theta'(\xi_1)}, \quad T/T_c = \frac{p}{p_c}\frac{\rho_c}{\rho} = \theta^{1+1/n}.$$

Vsi profili so prikazani na Sliki 2.
Kaj lahko ugotovimo iz grafov? Če bi morali Sonce opisati s politropnim indeksom, bi ga zagotovo raje opisali z $n = 3$ kot $n = 1{,}5$, saj da v vseh primerih boljši rezultat, razen pri temperaturi blizu površja. Najbolje se ujema pri profilu mase, pri gostoti in tlaku pa $n = 1{,}5$ prav tako dobro napove profil. Temeraturna ocena je najslabša, saj popolnoma zanemarjamo sevalni tlak. Za primerjavo med $n = 3$ in $n = 1{,}5$ pa lahko še rečemo, da so pri slednjem tlak, gostota in masa bolj skoncentrirani v središču in pri nižjem deležu radija padejo na nizke vrednosti.

4 Energija zvezde

Izračunajmo celotno energijo zvezde. Začnimo z relacijo med gostoto in tlakom:

$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1/n}\rho$$



Slika 2: Primerjave med politropnima modeloma z indeksoma $n = 1{,}5$ in $n = 3{,}0$ ter s standardnim modelom Sonca (SSM).

torej je

$$\mathrm{d}(p/\rho) = \mathrm{d}(K\rho^{1/n}) = \frac{K}{n}\rho^{-1+1/n}\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{n}\rho^{(1-n)/n}\frac{n}{n+1}\rho^{-1/n}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

V izpeljavi bomo večkrat uporabili integracijo po delih. Vedno bomo integrirali od središča s do površja p, pri čemer velja $r(\mathsf{s}) = 0$, $M_r(\mathsf{s}) = 0$, $p(\mathsf{p}) = 0$ in $\rho(\mathsf{p}) = 0$. Ti pogoji nam bodo odstranili vse neželene člene. Začnimo z definicijo in prvo integracijo po delih:

$$W_g = -\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{GM_r\,\mathrm{d}M_r}{r} = -\frac{1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{G\,\mathrm{d}(M_r^2)}{r} = -\frac{GM_r^2}{2r}\bigg|_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} - \int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{GM_r^2\,\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{GM_r^2}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Uporabimo pogoj za hidrostatično ravnovesje in še zgoraj izpeljano zvezo:

$$\frac{GM_r}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{\mathrm{d}p}{r} = -(n+1)\,\mathrm{d}(p/\rho).$$

To vstavimo v naš izračun in še dvakrat integriramo po delih:

$$\begin{aligned} W_p + \frac{GM^2}{2R} &= -\frac{1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{GM_r^2}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{n+1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} M_r\,\mathrm{d}(p/\rho) = \frac{n+1}{2}M_r\frac{p}{\rho}\bigg|_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} - \frac{n+1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{p}{\rho}\,\mathrm{d}M_r = \\ &= -\frac{n+1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} 4\pi p r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{n+1}{2}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{4\pi p}{3}\,\mathrm{d}(r^3) = -\frac{n+1}{2}\frac{4\pi}{3}Pr^3\bigg|_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} + \frac{n+1}{6}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} 4\pi r^3\,\mathrm{d}p. \end{aligned}$$

Prvi člen se spet izvrednoti v nič, pri drugemu pa upoštevamo pogoj za hidrostatično ravnovesje in kontinuitetno enačbo:

$$4\pi r^3 \,\mathrm{d}p = -4\pi r^3 \frac{GM_r}{r^2}\rho \,\mathrm{d}r = -\frac{GM_r}{r}\,\mathrm{d}M_r.$$

Vstavimo in dobimo

$$W_g + \frac{GM^2}{2R} = \frac{n+1}{6}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} 4\pi r^3 \,\mathrm{d}p = -\frac{n+1}{6}\int_{\mathsf{s}}^{\mathsf{p}} \frac{GM_r}{r}\,\mathrm{d}M_r = \frac{n+1}{6}W_g.$$

Po preureditvi dobimo:

$$W_g = \frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}.$$

Skupna energija je po virialnem izreku enaka polovici potencialne:

$$W = \frac{3}{n-5}\frac{GM^2}{2R}.$$

Za $n = 3$ dobimo

$$W^{(3)} = -\frac{3}{4}\frac{GM^2}{R}.$$

Kot zanimivost, če predpostavimo, da se gostota zvezde spreminja kot $\rho \propto r^n$, dobimo grafitacijsko energijo:

$$W_g = -\frac{n+3}{2n+5}\frac{GM^2}{R}.$$