UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

Matematika IV

Zapiski predavanj doc. dr. Markota Kandića

Študijsko leto 2022/2023
Letni semester

Avtor:

Simon Bukovšek

Zadnja sprememba: 26. februar 2024

Pred vami leži dokument, ki vsebuje zapiske predavanj doc. dr. Markota Kandića pri predmetu Matematika IV za dodiplomske študente fizike Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani v letnem semestru študijskega leta 2022/2023. Vsebina zapiskov je v veliki meri dobeseden prepis s table.

Med pisanjem pa sem naletel na mnogo zanimivih koščkov matematike, ki jih nismo omenili na predavanjih. Vse, česar nismo povedali na predavanjih, je zapisano v sivi barvi . Gre za kakšne izreke ali dokaze, ki smo jih zaradi premalo časa izpustili, za odgovore na kakšna vprašanja, ki so se mi porodila, za resnično čudovite matematične iskrice, ki sem jih odkril med pisanjem, ali pa za nekoliko širši kontekst obravnavane snovi, ki jo je meni pomagal bolje razumeti. Za siv tekst obstaja še posebej visoka verjetnost napak. Pri tem sem izhajal iz starih zapiskov profesorja Kandića (za izpuščene dokaze), knjige Bojana Magajne, na kateri temelji ta predmet, in iz mnogih člankov na Wikipediji in Wolfram MathWorldu. Skice in grafi so narisani z orodjema Ti*k*Z in PGFPlots, ki sta vgrajena v LaTeXin ponujata čudovito vektorsko grafiko. Na žalost je risanje z njima zelo zamudno, zato so narisane le najpomembnejše skice. Dva kompleksnejša grafa sta narisana s pomočjo Wolfram Mathematice.

OPOZORILO: vse, kar je napisano v sivem , velja le kot zanimivost zainteresiranemu bralcu, ne pa kot ključno gradivo za študenta, ki se mu hitreje kot s svetlobno hitrostjo približuje izpit iz teorije pri Matematiki IV.

Četudi je vsebina povzeta po predavanjih, ki so bila popolnoma korektna, so se v te zapiske nedvomno prikradle raznovrstne napake – tipkarske, slovnične in vsebinske. Ne vzemite vsega, kar notri piše, za sveto, saj sem avtor le študent fizike. Če opazite kakršnokoli napako, mi jo prosim javite na simon.bukovsek@gmail.com.

V teh zapiskih se uporabljajo naslednje označbe. Končno dimenzionalni vektorji in vektorske funkcije so označene s krepko pokončno pisavo $\mathbf{v}$ in ne s puščico. Skalarni produkt je označen z lomljenimi oklepaji $\langle f, g\rangle$, razen v poglavju Harmonične funkcije, kjer je označen s pikico $(\cdot)$. Integrali po zaprtih ploskvah in sklenjenih krivuljah so posebej označeni s krožci: $\oiint$ in $\oint$. Komplement množice A je označen kot A^{C}, pogoji pri definiciji množice pa so od prvega dela ločeni s podpičjem, čeprav smo jih pri pouku označevali z dvopičjem. Imaginarni del števila z je Im z, realni del je Re z. Imaginarna enota i je povsod zapisana pokončno, zato da se loči od morebitnega indeksa i, ki je vedno pisan ležeče.

Naj se na koncu zahvalim še sošolcu Maticu Hočevarju za mnogo komentarjev, kako izboljšati zapiske, pa tudi številnim drugim neimenovanim sošolcem, ki so (in bodo) prispevali tipkarske, pravopisne in vsebinske popravke.

Simon Bukovšek

Kazalo

Poglavje 1

Kompleksna analiza

1.1 Ponovitev

Definicija 1.1. *Kompleksna števila* so urejeni pari v $\mathbb{R}^2$ oblike (a, b), pri čemer veljata operaciji seštevanja $(+)$ in množenja $(\cdot)$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Množico $\mathbb{R}^2$ z operacijama $+$ in $\cdot$ imenujemo *kompleksna ravnina*.

Definicija 1.2. Element $(0, 1)$ se imenuje *imaginarna enota* in jo označimo z i.

Opomba: To pomeni, da lahko namesto urejenega para (a, b) pišemo $a + ib$. Velja še, da lahko element $(a, 0)$ predstavimo kot realno število $a \in \mathbb{R}$, element $(0, b)$ pa kot število ib, kjer je $b \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.3. Za realno število $z = a + ib$ definiramo *realni del* $\operatorname{Re} z = a$ in *imaginarni del* $\operatorname{Im} z = b$.

Definicija 1.4. Kompleksnemu številu $z = a + ib$ priredimo *konjugirano vrednost* $\overline{z} = a - ib$, *absolutno vrednost* $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ in *argument* φ, tako da velja $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

1.2 Topološke lastnosti kompleksne ravnine

Definicija 1.5. *Odprt krog* s središčem v $a \in \mathbb{C}$ in polmerom $r \in \mathbb{R}$ označimo z $D(a, r)$. *Zaprt krog* s središčem v $a \in \mathbb{C}$ in polmerom $r \in \mathbb{R}$ označimo z $\overline{D}(a, r)$. Velja:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| < r\},$$

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| \leq r\},$$

$$S(a, r) = \partial D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| = r\}.$$

Definicija 1.6. Množica $U \subset \mathbb{C}$ je *odprta* , če za vsak $a \in U$ obstaja tak $r > 0$, da je $a \in D(a,r) \subseteq U$. *Zaprta množica* je komplement odprte množice.

Trditev 1.1. *Množica $U \subseteq \mathbb{C}$ je odprta, natanko tedaj ko je U unija odprtih krogov.*

Opomba: Odprt krog je odprta množica, zaprt krog je zaprta množica.

Definicija 1.7. Množica A je *okolica* točke a, če obstaja tak $r > 0$, da velja $D(a,r) \subseteq A$.

Opomba: Množici A lahko priredimo *notranjost* (int A) in *rob* ∂A.

Definicija 1.8. Množica $A \subseteq \mathbb{C}$ je *povezana*, če je ne moremo zapisati v obliki $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, pri čemer sta U in V disjunktni odprti množici, ki sekata A. Maksimalne povezane podmnožice imenujemo *komponente*. Vsaka množica je unija svojih komponent. Neprazna povezana odprta množica se imenuje *območje*.

Definicija 1.9. Funkcija $f : U \to \mathbb{C}$ je *zvezna* v točki $z \in U$, če $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ni:\ z' \in U,\ |z - z'| < \delta \implies |f(z) - f(z')| < \varepsilon$. f je zvezna na U, če je zvezna v vsaki točki $z \in U$.

Trditev 1.2. *$f : U \to \mathbb{C}$ je zvezna $\iff$ $f^{-1}(V)$ je odprt za vsako odprto množico $V \subseteq \mathbb{C}$. Zvezna slika povezane množice je povezana.*

Definicija 1.10. *Pot* je zvezna preslikava $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. *Tir* poti je graf te preslikave in je vedno povezana množica.

Opomba: Kompleksno pot γ lahko vedno zapišemo kot kombinacijo kompleksnega in realnega dela $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \mathrm{i}\gamma_2(t)$.

Definicija 1.11. γ je zvezna, natanko tedaj ko sta γ_1 in γ_2 zvezni. γ je (zvezno) odvedljiva, če sta γ_1 in γ_2 (zvezno) odvedljivi.

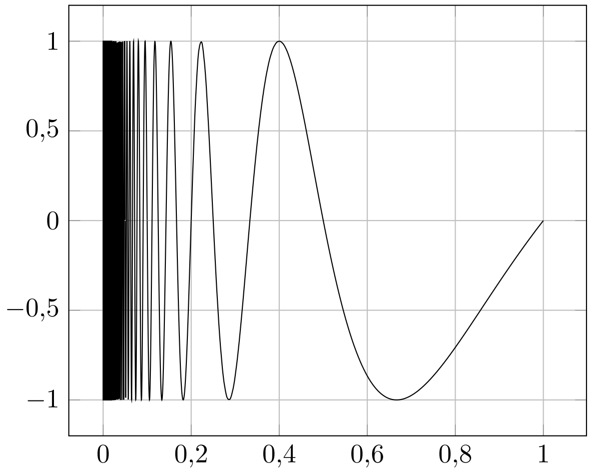
Opomba: Zvezne preslikave na $[a,b]$ označimo z $\mathcal{C}[a,b]$, zvezno odvedljive pa $\mathcal{C}^1[a,b]$.

Definicija 1.12. Če lahko interval $[a,b]$ razdelimo na končno mnogo podintervalov, na katerih je γ zvezno odvedljiva, v ogliščih pa obstajata levi in desni odvod, potem je γ *kosoma/odsekoma zvezno odvedljiva*. Če je pot sestavljena iz samih daljic, potem ji rečemo *odsekoma linearna pot*. Pravimo, da je množica $A \in \mathbb{C}$ *s potmi povezana*, če za poljubni točki $x, y \in A$ obstaja (zvezna) pot $\gamma : [a,b] \to A$, da je $\gamma(a) = x$ in $\gamma(b) = y$.

Izrek 1.3. *Naj bo U odprta množica v $\mathbb{C}$. Tedaj velja naslednje:*
i) U je povezana s potmi $\iff$ U je povezana;
ii) U je povezana s potmi $\iff$ U je povezana z zvezno odvedljivimi potmi.

Opomba: vsaka (ne nujno odprta) s potmi povezana množica je povezana, ne pa nujno obratno.

Zgled 1.1. Naj bo $f : (0,1] \to [-1,1]$ funkcija dana s predpisom $f(x) = \sin(\pi/x)$. *Varšavski lok* (slika 1.1) je množica $\Gamma_f \cup \{0\} \times [-1,1]$. Ta množica je povezana, saj je ne moremo razdeliti na dve komponenti, vendar ni povezana s potmi, saj ne obstaja pot med grafom sinusa in dodano pokončno črto.



Slika 1.1: Varšavski lok $(\sin(\pi/x))$.

Definicija 1.13. V kompleksni ravnini definiramo dodatno točko ∞, ki je neskončno oddaljena od vseh ostalih točk. Odprte okolice točke ∞ so komplementi vseh kompaktnih množic v $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}\cup\infty$ je *razširjena kompleksna ravnina*, če pa zraven še na prejšnji način definiramo še, kaj so okolice za ∞, pa dobimo *Riemannovo sfero*.

Obravnavajmo enotsko sfero S in označimo točko $N = (0, 0, 1)$ (kot severni pol). Celotno kompleksno ravnino lahko z bijekcijo preslikamo na $S \setminus \{N\}$ s *stereografsko projekcijo*: $\Phi : S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, $T \mapsto T'$ s predpisom $\Phi(x, y, z) = (x/(1-z), y/(1-z))$, kar je v kompleksni ravnini ekvivalentno številu $(x+iy)/(1-z)$. Stereografska projekcija preslika točko T v tisto točko, kjer premica TN seka ravnino xy. Φ je zvezna, lahko pa jo razširimo še s predpisom $N \mapsto \infty$. Zaradi izbire okolice ∞ je Φ še vedno zvezna, njen inverz pa tudi. Zato je $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ topološko sfera.

1.3 Holomorfne funkcije

Definicija 1.14. Naj bo $U \subset \mathbb{C}$ odprta množica in $f : U \to \mathbb{C}$ funkcija. f je *holomorfna* v točki $a \in U$, če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Če ta limita obstaja, jo označimo z $f'(a)$ in rečemo, da je f v točki a odvedljiva v kompleksnem smislu. Če je f holomorfna v vsaki točki $a \in U$, potem je f holomorfna na U. Če je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna, rečemo, da je *cela*.

Zgled 1.2. Obravnavajmo funkcijo $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Za $n = 0$ je $f(z) = 1$, $f'(z) = 0$ in je holomorfna. Za $n \in \mathbb{N}$ pa si poglejmo naslednje:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} (nz^{n-1} + \dots + h^{n-1}) = nz^{n-1}.$$

Z indukcijo lahko pokažemo, da je f holomorfna in celo cela.

Zgled 1.3. Poglejmo si še $f(z) = \overline{z}$. Imamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Ta limita ne obstaja, saj se ji lahko približamo po realni osi in dobimo vrednost 1 ali pa po imaginarni osi, pri čemer dobimo vrednost -1.

Trditev 1.4. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji v točki $a \in U$. Tedaj velja naslednje:*

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ je λf holomorfna v a in velja $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;
ii) vsota $f+g$ je holomorfna v a in velja $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
iii) produkt fg je holomorfen v a in velja $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
iv) če je $g(a) \neq 0$, potem je (f/g) holomorfna v a in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Zgled 1.4. Polinom $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ je holomorfen na $\mathbb{C}$. Prav tako je racionalna funkcija $r(z) = p(z)/q(z)$ holomorfna povsod na $\mathbb{C}$, razen v ničlah q.

1.4 Cauchy-Riemannove enačbe

Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ in $f : U \to \mathbb{C}$. Velja $f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\, f(z)$. Na dolgo lahko to napišemo kot

$$f(z) = \mathrm{Re}\, f(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\, f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

Zgled 1.5. Obravnavajmo $f(z) = z^3$. Imamo

$$f(x+\mathrm{i}y) = (x+\mathrm{i}y)^3 = x^3 + 3\mathrm{i}x^2y - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3 = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3).$$

Torej je $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ in $v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

Izrek 1.5. *Naj bosta $u, v : U \to \mathbb{R}$ realni funkciji na odprti množici $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Velja:*

a) če je $f = u + \mathrm{i}v$ holomorfna na U, potem sta u in v parcialno odvedljivi na U in velja $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$;
b) če sta u in v diferenciabilni in če velja $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$, potem je $f = u + \mathrm{i}v$ holomorfna in velja $f' = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$.

Dokaz.

a) Vemo, da obstaja

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

To limito izračunamo v dveh primarnih smereh: po realni in imaginarni osi za $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+\mathrm{i}h) - f(z)}{\mathrm{i}h}.$$

Pišimo $f = u + \mathrm{i}v$:

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + \mathrm{i}\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}\right),$$

zato morata obstajati obe limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = u_x \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} = v_x.$$

Imamo tudi

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \left(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{\mathrm{i}h} + \mathrm{i}\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{\mathrm{i}h}\right) =$$

$$= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \left(\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} - \mathrm{i}\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h}\right),$$

zato morata obstajati limiti

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}=u_y \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0}\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}=v_y.$$

Vemo tudi, da mora veljati $f'=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$, zato dobimo $u_x=v_y$ in $u_y=-v_x$.

b) Izberimo $z=x+\mathrm{i}y$ in $h=h_1+\mathrm{i}h_2$, tako da je $z+h\in U$. Dokazati moramo, da obstaja limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

in da je enaka $u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$. Po točki a) vemo, da je $f'=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$. Ker sta u in v diferenciabilni, velja

$$u(x+h_1,y+h_2)=u(x,y)+u_x(x,y)h_1+u_y(x,y)h_2+o_1(h),$$

$$v(x+h_1,y+h_2)=v(x,y)+v_x(x,y)h_1+v_y(x,y)h_2+o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h\to 0}\frac{o_1(h)}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{o_2(h)}{|h|}=0.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z)&=(u(x+h_1,y+h_2)+\mathrm{i}v(x+h_1,y+h_2))-(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y))\\
&=(u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y))+\mathrm{i}(v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y))\\
&=(u_x(x,y)h_1+u_y(x,y)h_2+o_1(h))+\mathrm{i}(v_x(x,y)h_1+v_y(x,y)h_2+o_2(h))\\
&=(u_x(x,y)h_1-v_x(x,y)h_2+o_1(h))+\mathrm{i}(v_x(x,y)h_1+u_x(x,y)h_2+o_2(h))\\
&=(u_x(x,y)+\mathrm{i}v_x(x,y))h_1+\mathrm{i}(u_x(x,y)+\mathrm{i}v_x(x,y))h_2+o_1(h)+\mathrm{i}o_2(h)\\
&=(u_x(x,y)+\mathrm{i}v_x(x,y))(h_1+\mathrm{i}h_2)+o_1(h)+\mathrm{i}o_2(h).
\end{aligned}$$

Delimo s h in uporabimo limito:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=u_x(x,y)+\mathrm{i}v_x(x,y)+\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=u_x(x,y)+\mathrm{i}v_x(x,y)=f'(z).$$

□

Opomba: tem enačbam rečemo *Cauchy-Riemannov sistem*:

$$u_x=v_y \quad \text{in} \quad u_y=-v_x.$$

Poglejmo si še abstraktni pristop k Cauchy-Riemannovim enačbam. Pišimo $z=x+\mathrm{i}y$, $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$, $x=(z+\overline{z})/2$ in $y=(z-\overline{z})/2\mathrm{i}$. Funkciji u in v sta taki kot v izreku (1.5), funkcija f pa je $f=u+\mathrm{i}v$. Zanimata nas parcialna odvoda po z in po $\overline{z}$.
Funkcijo f parcialno odvajamo po z in ob upoštevanju verižnega pravila dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Tako smo dobili operator za parcialno odvajanje po z:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Podobno ponovimo pri parcialnem odvajanju po $\overline{z}$ in dobimo operator za parcialno odvajanje po $\overline{z}$:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Sedaj upoštevamo $f = u + \mathrm{i}v$ in s pomočjo operatorjev odvajamo f:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}((u_x+\mathrm{i}v_x)-\mathrm{i}(u_y+\mathrm{i}v_y)) = \frac{1}{2}((u_x+v_y)+\mathrm{i}(-u_y+v_x)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}((u_x+\mathrm{i}v_x)+\mathrm{i}(u_y+\mathrm{i}v_y)) = \frac{1}{2}((u_x-v_y)+\mathrm{i}(u_y+v_x)).$$

Enakost $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ velja natanko tedaj, ko veljata tudi Cauchy-Riemannovi enačbi: $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Rešitvi sistema Cauchy-Riemannovih enačb sta u in v. Če je f holomorfna, je $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in odvod funkcije f zapišemo:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = u_x + \mathrm{i}v_x.$$

1.5 Konformnost holomorfnih funkcij

Naj bo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ (zvezno) odvedljiva pot, ki gre skozi točko $z_0 \in \mathbb{C}$. Zato obstaja tak $t_0 \in [0,1]$, da je $\gamma(t_0) = z_0$. Tangentni vektor na γ v z_0 je $\dot{\gamma}(t_0)$. Naj bo f holomorfna funkcija na okolici tira poti γ. Tir običajno označimo z γ^* ali $[\gamma]$ ali $\gamma[0,1]$. Ker je γ holomorfna, je $f \circ \gamma$ odvedljiva pot: $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Tir poti $f \circ \gamma$ poteka skozi točko $(f \circ \gamma)(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0)$.

Trditev 1.6. *Za tangentni vektor na pot $f \circ \gamma$ v točki $f(z_0)$ velja*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0).$$

Dokaz. Točko $z = x + \mathrm{i}y$ identificiramo z $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. V tem in nekaterih naslednjih dokazih si bomo pomagali z naslednjo zamenjavo:

$$\begin{aligned} x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad &\longleftrightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ f(x+\mathrm{i}y) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ \gamma(t) : I \to \mathbb{C} \quad &\longleftrightarrow \quad \gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R} \\ U \subseteq \mathbb{C} \quad &\longleftrightarrow \quad U \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Za izračun tangentnega vektorja na pot $f \circ \gamma$ v točki $f(z_0)$ bomo uporabili zgornjo zamenjavo in izračunali tangentni vektor na $\mathbf{F} \circ \begin{bmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{bmatrix}$ v t_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{F} \circ \begin{bmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x\dot{\gamma}_1 + u_y\dot{\gamma}_2 \\ v_x\dot{\gamma}_1 + v_y\dot{\gamma}_2 \end{bmatrix}.$$

To pa je ekvivalentno kompleksnemu številu $(u_x\dot{\gamma}_1 + u_y\dot{\gamma}_2) + \mathrm{i}(v_x\dot{\gamma}_1 + v_y\dot{\gamma}_2)$. Poglejmo še naslednje:

$$\begin{aligned} f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0) &= (u_x + \mathrm{i}v_x)(\dot{\gamma}_1 + \mathrm{i}\dot{\gamma}_2) \\ &= (u_x\dot{\gamma}_1 - v_x\dot{\gamma}_2) + \mathrm{i}(v_x\dot{\gamma}_1 + u_x\dot{\gamma}_2) \\ &= (u_x\dot{\gamma}_1 + u_y\dot{\gamma}_2) + \mathrm{i}(v_x\dot{\gamma}_1 + v_y\dot{\gamma}_2). \end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo uporabili Cauchy-Riemannove enačbe. □

Definicija 1.15. Naj bosta γ_1 in γ_2 odvedljivi poti, ki se sekata v točki $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. Kot med γ_1 in γ_2 v presečišču je definiran kot kot med tangentnima vektorjema na krivulji v točki presečišča. Pišimo $\dot{\gamma}_1(t_1) = |\dot{\gamma}_1(t_1)|e^{\mathrm{i}\varphi_1(t_1)}$ in $\dot{\gamma}_2(t_2) = |\dot{\gamma}_2(t_2)|e^{\mathrm{i}\varphi_2(t_2)}$. Kot med krivuljama je $|\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_2)|$.

Definicija 1.16. Preslikava $f : U_1 \to U_2$ je *konformna*, če ohranja kote med krivuljami.

Izrek 1.7. *Če je $f : U_1 \to U_2$ holomorfna in $f'(z) \neq 0$ za vse $z \in U_1$, potem je f konformna.*

Dokaz. Naj bosta γ in δ poti z vrednostmi v U_1, ki se sekata v točki $z_0 = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$. Poglejmo si tangentna vektorja $f \circ \gamma$ in $f \circ \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0) = |f'(z_0)|e^{\mathrm{i}\varphi}|\dot{\gamma}(t_0)|e^{\mathrm{i}\alpha} = |f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0)|e^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \delta)(s_0) = f'(z_0)\dot{\delta}(s_0) = |f'(z_0)|e^{\mathrm{i}\varphi}|\dot{\delta}(s_0)|e^{\mathrm{i}\beta} = |f'(z_0)\dot{\delta}(s_0)|e^{\mathrm{i}(\varphi+\beta)}.$$

Kot med tangentama je $|\varphi + \alpha - \varphi - \beta| = |\alpha - \beta|$, kar je enako kot pred preslikavo. Vidimo, da se tudi orientacija ohranja. □

1.6 Potenčne vrste

Potenčna vrsta je formalno oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n.$$

Ta vrsta konvergira v točki α. Ta točka se imenuje *središče potenčne vrste*.

Trditev 1.8. *Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ konvergira v točki z_0 $\iff$ vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira v točki $z_0 - \alpha$. Če je D konvergenčno območje vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, potem je $D - \alpha$ konvergenčno območje vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Enako velja za enakomerno konvergenco, absolutno konvergenco in odvedljivost.*

Ker se te lastnosti ohranjajo po premikih, se po navadi izplača obravnavati vrsto oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Konvergenčno območje $D = \{z \in \mathbb{C};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergira}\}$ lahko zelo natančno določimo. Sedaj bomo nekoliko razširili izreke o vrstah iz Matematike I. Takrat smo povedali *Cauchy-Hadamardovo formulo*:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

kjer je R *konvergenčni polmer* vrste. Lani smo že omenili, da vrsta konvergira absolutno na intervalu $(-R, R)$, divergira na $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$ in konvergira enakomerno na vsakem zaprtem intervalu znotraj $(-R, R)$

Izrek 1.9. *Dana je potenčna vrsta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$. Naj bo R njen konvergenčni polmer.*

i) Potenčna vrsta konvergira absolutno na $D(\alpha, R)$ in enakomerno na kompaktnih podmnožicah v $D(\alpha, R)$.

ii) Potenčna vrsta divergira zunaj $\overline{D}(\alpha, R)$.

Izrek 1.10. *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n.$$

Tedaj ima potenčna vrsta

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-\alpha)^{n-1}$$

tudi konvergenčni polmer R. Na $D(\alpha, R)$ je f holomorfna in velja $f'(z) = g(z)$ oziroma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-\alpha)^{n-1}.$$

Dokaz. Vemo že, da imata f in g isti konvergenčni radij. Namreč

$$\frac{1}{R_g} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_f}.$$

Zaradi premika v izhodišče zadošča, da dokažemo samo izrek v primeru $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Izberimo $w \in D(0, R)$. Dokazati moramo, da $f'(w)$ obstaja in velja $f'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Izberemo tak ρ, da velja $|w| < \rho < R$ in tak z, da je $|z| < \rho$. Poglejmo si

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^{n-1} + w z^{n-2} + ... + w^{n-1} - n w^{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - w)(z^{n-2} + 2 w z^{n-3} + ... + (n-2) z w^{n-2} + (n-1) w^{n-2}).$$

Šteli smo od $n = 1$, saj je ničti člen očitno enak nič. Sedaj pošljemo w proti z:

$$\lim_{w\to z} \left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |z - w| (|z|^{n-2} + ... + (n-2)|z||w|^{n-3} + (n-1)|w|^{n-2})$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z - w| n(n-1) \rho^{n-2} = \frac{|z - w|}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n(n-1) \rho^{n-2}.$$

Ta vsota pa konvergira, saj ima konvergenčni radij enak $R > \rho$. Naj bo $M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n(n-1) \rho^{n-2}$. Tedaj je

$$\lim_{w\to z} \left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right| \leq \frac{1}{2} M |z - w| = 0$$

za $|z| < \rho$. ☐

Posledica 1.11. *Naj bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ konvergentna na $D(\alpha, R)$. Potem je f neskončnokrat odvedljiva v kompleksnem smislu in za $k \in \mathbb{N}_0$ velja*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

Zgled 1.6. Eksponentno funkcijo definiramo kot vsoto potenčne vrste

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := e^z.$$

Kot pri Matematiki I vidimo, da je $R = \infty$, kar pomeni, da je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna in cela. e^z konvergira absolutno na $\mathbb{C}$ in enakomerno na vseh kompaktnih podmnožicah. Naštejmo še nekaj ostalih elementarnih funkcij:

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Vse navedene funkcije so cele, torej holomorfne iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$, ustrezne potenčne vrste absolutno konvergentne na $\mathbb{C}$ in enakomerno konvergentne na vseh kompaktnih množicah v $\mathbb{C}$. Če zgornje potenčne vrste odvajamo, dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) = \cos(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(z) = -\sin(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh(z) = \cosh(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh(z) = \sinh(z).$$

Velja tudi $e^z e^w = e^{z+w} = e^w e^z$ (brez dokaza). Če pišemo $z = x + \mathrm{i}y$, imamo

$$|e^z| = |e^x e^{\mathrm{i}y}| = |e^x||e^{\mathrm{i}y}| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Poglejmo si še, kako rešimo enačbo $e^z = 1$. Velja $|e^z| = e^x = 1$, torej $x = 0$ in $y = 2k\pi$. Sledi $z = 2k\pi\mathrm{i}$ za nek $k \in \mathbb{Z}$.

Posledica 1.12.

$$e^z = e^w \iff z - w = 2k\pi\mathrm{i}, \text{ za } k \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1 \iff z - w = 2k\pi\mathrm{i}$. Poleg tega sledi še, da $e^w \neq 0$ za vsak $w \in \mathbb{C}$ ter da za e^w obstaja inverzna vrednost $(e^w)^{-1} = e^{-w}$. □

1.7 Integracija kompleksnih funkcij

Definicija 1.17. Naj bosta $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilni funkciji in $f = u + \mathrm{i}v : [a, b] \to \mathbb{C}$. Tedaj integral funkcije f definiramo kot

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Trditev 1.13. *Funkcija $f = u + \mathrm{i}v$ je integrabilna natanko tedaj, ko sta u in v integrabilni.*

Trditev 1.14. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrabilni funkciji in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Velja*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

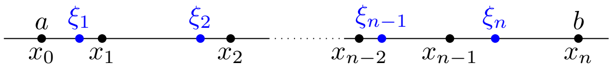
Tej lastnosti rečemo linearnost integrala.

Če je $f = u + iv : [a, b] \to \mathbb{C}$ zvezna, potem sta tudi $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni. Ker so zvezne funkcije na zaprtem intervalu integrabilne, je tudi $f = u + iv$ integrabilna. Alternativni pristop je preko Riemannovega integrala za $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Imejmo *delitev intervala* $[a, b]$, to je množico točk $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, da velja

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Naj bo $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ usklajena izbira testnih točk, tako da velja $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ za vsak $i \in \{1, ..., n\}$.



Riemannovo vsoto zapišemo kot

$$R(f, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Rečemo, da je funkcija f *Riemannovo integrabilna*, če obstaja "limita" Riemannovih vsot, ko gre širina najdaljšega intervala delitve proti nič.

Trditev 1.15. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrabilna funkcija. Velja*

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Dokaz. (Skica) Naj bo $R = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ neka Riemannova vsota. Po trikotniški neenakosti velja

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}).$$

Ko gre širina najdaljšega intervala proti nič, dobimo v limiti

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Definicija 1.18. Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ in $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ zvezno odvedljiva pot, torej $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, kjer sta $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi. Če je $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna, definiramo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

To definicijo lahko razširimo na kosoma zvezno odvedljive poti. Če je γ kosoma zvezno odvedljiva, potem interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[t_{j-1}, t_j]$, na katerih je γ zvezno odvedljiva. Označimo $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to D$ skrčitev poti γ na interval $[t_{j-1}, t_j]$. Velja

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma_j(t))\dot{\gamma}_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zgled 1.7. Naj bo $f : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija in naj bo γ pozitivno orientirana krožnica $\partial D(a,r) = S(a,r)$. Če želimo f integrirati po tej krožnici, moramo najprej parametrizirati γ. Najlažje je to storiti kot $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{i}t}$, za $t \in [0, 2\pi]$. Tako imamo

$$\int_{S(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}r \int_0^{2\pi} f(a + e^{\mathrm{i}t})e^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$$

Naj bo dana pot $\gamma = \gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2$, ki je odvedljiva ($\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \mathrm{i}\dot{\gamma}_2$). To si lahko predstavljamo kot krivuljo (γ_1, γ_2) v $\mathbb{R}^2$. Ločni element krivulje v $\mathbb{R}^2$ je enak

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Za dolžino krivulje γ torej velja

$$l(\gamma) = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ta formula velja tudi za kosoma zvezno odvedljive poti. Od tu naprej bo γ vedno kosoma zvezno odvedljiva, razen če bo pisalo drugače.

Trditev 1.16. *Velja*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Dokaz.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$$

□

Ker je f zvezna na γ^* (tir poti γ), potem $|f|$ doseže maksimalno vrednost M. Zato velja

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z \leq \int_\gamma M\,\mathrm{d}s = M\int_\gamma \mathrm{d}s = Ml(\gamma).$$

Trditev 1.17. *Če je $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ naraščajoča zvezno odvedljiva bijekcija, potem je*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dokaz. (Skica) Uporabimo substitucijo $s = \varphi(t)$:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\frac{\mathrm{d}(\gamma\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

1.8 Splošno o operacijah s potmi

Definicija 1.19. Naj bo γ pot, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. $\gamma(a)$ se imenuje *začetna točka*, $\gamma(b)$ pa *končna točka*. Če je $\gamma(a) = \gamma(b)$, rečemo, da je γ *sklenjena pot* ali *zanka*. Za vsako pot γ obstaja *nasprotna pot* $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$.

Preslikava $t \mapsto a+b-t$ je padajoča bijekcija. Velja $\gamma^* = (\gamma^-)^*$.

Trditev 1.18. *Če je f zvezna funkcija in γ kosoma zvezno odvedljiva, potem je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dokaz. Uporabimo substitucijo $s = a+b-t$:

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma^-(t))\dot{\gamma}^-(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\dot{\gamma}(a+b-t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_b^a f(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

Pri operacijah s potmi se splača imeti parametrizacijo oblike $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Za to uporabimo bijekcijo $\varphi : [a,b] \to [0,1]$, ki je naraščajoča in zvezno odvedljiva:

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Krivuljni integral se po reparametrizaciji ne spremeni. Imejmo dve krivulji $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ in $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, pri čemer je $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Krivulji spojimo z naslednjim predpisom:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t); & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1); & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Spoj krivulj γ_1 in γ_2 označimo z $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Naj bosta γ_1 in γ_2 kosoma zvezno odvedljivi poti. Naj velja $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ in $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ ter $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ in $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Tedaj je $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ zanka z začetno in končno točko $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

Trditev 1.19. *Naj bosta γ_1 in γ_2 poti z isto začetno in končno točko. Velja*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Trditev 1.20. *Za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ in vsako kosoma zvezno odvedljivo pot $\gamma : [a,b] \to D$ velja*

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dokaz.

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma)(t)\,\mathrm{d}t = (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma)(a).$$

□

Opomba: v dokazu smo predpostavili, da je f' integrabilna. V splošnem tega ne bi smeli. Za protiprimer si poglejmo funkcijo $f(x) = x^{-2}\sin(x^{-2})$ za $x \neq 0$ in $f(0) = 0$. Ta funkcija je odvedljiva povsod na $\mathbb{R}$, vendar je njen odvod neomejen v okolici ničle, zato ni Riemannovo integrabilna. Še več, lahko se nakuha tako funkcijo, ki je povsod odvedljiva, njen odvod je omejen, vendar ni Riemannovo integrabilen. Primer take funkcije je Volterrova funkcija . Njen odvod je omejen, vendar nezvezen na ne-gosti množici z pozitivno Lebesgueovo mero (Smith-Volterra-Cantorjeva množica), zato ni Riemannovo integrabilna. Na srečo nam za take eksotične primere ni potrebno skrbeti, saj za holomorfne funkcije velja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazovali.

Izrek 1.21. *Če je funkcija f holomorfna, potem je f' zvezna.*

Izrek 1.22. *Naj bo $f : D^{\mathrm{odp}} \to \mathbb{C}$ taka zvezna funkcija, da je*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

za vsako sklenjeno odsekoma zvezno odvedljivo pot γ v D. Potem obstaja taka holomorfna funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, da je $F' = f$.

Opomba: Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ zvezna. Velja tudi, da je $\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = 0$ za vsako sklenjeno pot γ, saj lahko pišemo

$$\oint_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\mathrm{d}z = 0.$$

Dokaz. Ali lahko za iskanje takega F, da velja $F' = f$, uporabimo osnovni izrek algebre? Poskusimo $F(z)$ definirati preko krivuljnega integrala. Izberimo $a \in D$. Za $z \in D$ definirajmo

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kjer je γ neka pot med a in z. To lahko storimo, če sta a in z znotraj iste komponente, zato lahko brez škode za splošnost (BŠS) predpostavimo, da je D povezano območje. Preveriti moramo, če je F dobro definiran, torej neodvisen od izbire poti γ. Naj bosta γ_1 in γ_2 poti od a do z. Iz predpostavke sledi

$$\oint_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \iff \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \iff \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

zato je $F(z)$ dobro definiran. Označimo

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kar pomeni krivuljni integral od a do z, ki je neodvisen od izbire kosoma zvezno odvedljive poti med a in z. Sedaj moramo dokazati še, da velja $F'(z) = f(z)$ za vsak $z \in D$. Ker je D odprta množica, lahko v okolici točke z zagotovo najdemo tako točko $z + h$, ki tudi leži v D. Uporabimo definicijo odvoda:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w\right) - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w\right|.$$

Ker je f zvezna funkcija, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za $w \in D$ in $|w-z| < \delta$ velja $|f(w)-f(z)| < \varepsilon$. Nadaljujemo od prej in uporabimo definicijo zveznosti:

$$\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(w)-f(z)|\,\mathrm{d}w \le \frac{1}{|h|} l(\gamma)\varepsilon.$$

Ker je množica D odprta, lahko vzamemo tako majhen δ, da bo daljica med z in $z+h$ ležala v celoti v krogu znotraj D. Tedaj bo veljalo $l(\gamma) = h$ in se nam zgornji obrazec poenostavi v ε. Če povzamemo: ugotovili smo, da velja

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

To pomeni, da $F' = f$. □

1.9 Ovojno število in Cauchyjev izrek

Definicija 1.20. Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kosoma zvezno odvedljiva sklenjena pot in naj $z \notin \gamma^*$. *Indeks* ali *ovojno število* točke z glede na pot γ je

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z} \,\mathrm{d}t.$$

Ker je $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ holomorfna (racionalna) funkcija na $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, je zvezna. Zaradi $z \notin \gamma^*$, je zgornji integral dobro definiran in obstaja.

Lema 1.23. *Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ odsekoma zvezno odvedljiva pot in $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Tedaj je funkcija $F : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, dana s predpisom*

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi,$$

holomorfna. Funkcijo F lahko na vsakem odprtem krogu $D(\alpha, r) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ razvijemo v potenčno vsoto

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

pri čemer so

$$a_n = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - \alpha)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi.$$

Dokaz. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ker je $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ odprta množica (komplement kompaktne krivulje), obstaja krog $D(\alpha, r) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Dokazali bomo, da se lahko F na tem krogu razvije v potenčno vrsto, zato bo F holomorfna na $D(\alpha, r)$ in posledično v α. Ideja dokaza je, da $\frac{1}{\xi - z}$ razvijemo kot potenčno vrsto v $D(\alpha, r)$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - \alpha + \alpha - z} = \frac{1}{\xi - \alpha} \left(1 + \frac{z - \alpha}{\xi - \alpha}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\xi - \alpha)^{n+1}}.$$

Ker z leži znotraj kroga D in ker ξ leži na γ^*, torej izven kroga D, veljata neenakosti $|z - \alpha| < r$ in $|\xi - \alpha| > r$. Sledi $q = \left|\frac{z-\alpha}{\xi-\alpha}\right| < 1$, torej smo zgornji razvoj lahko naredili. Imamo

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-\alpha)^n}{(\xi - \alpha)^{n+1}} \right) \mathrm{d}\xi.$$

Radi bi zamenjali vrstni red integrala in vsote. Za to mora biti vsota enakomerno konvergentna. Označimo še $M = \max_{\gamma^*} |f|$. Velja

$$\left| \frac{f(\xi)(z-\alpha)^n}{(\xi - \alpha)^{n+1}} \right| \leq M \frac{1}{|\xi - \alpha|} q^n \leq \frac{M q^n}{r}.$$

Ker je $|q| < 1$ in sta M in r konstantna, naša funkcijska vrsta konvergira enakomerno po Weierstrassovem kriteriju. Sledi:

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-\alpha)^n}{(\xi-\alpha)^{n+1}}\right)\mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\right)(z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n.$$

□

Izrek 1.24. *Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sklenjena odsekoma zvezno odvedljiva pot in naj bo $D = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Tedaj je $z \mapsto \operatorname{ind}_\gamma(z)$ zvezna funkcija, katere vrednosti so cela števila. Indeks je konstanta na vsaki povezani komponenti D in ničeln na neomejeni komponenti.*

Dokaz. Funkcija indeks je definirana kot

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Po prejšnji lemi (1.23) – uporabimo zvezno funkcijo $f(z) = 1$ – je $\operatorname{ind}_\gamma$ zvezna funkcija na D. Definirajmo $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(t) = (\gamma(t) - z)\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right).$$

Poglejmo si njen odvod:

$$\begin{aligned}
\dot F(t) &= \dot\gamma(t)\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) + (\gamma(t)-z)\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \frac{-\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u \\
&= \dot\gamma(t)\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) - (\gamma(t)-z)\frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)-z}\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= (\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t))\exp\left(-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ker pa velja $\dot F = 0$ za $\forall t \in [a,b]$, mora biti $F(a) = F(b)$. Dobimo

$$F(a) = (\gamma(a)-z)\exp\left(-\int_a^a \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) = \gamma(a) - z = \gamma(b) - z,$$

pri čemer smo upoštevali $\gamma(a) = \gamma(b)$, in

$$F(b) = (\gamma(b)-z)\exp\left(-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right).$$

Ko to dvoje enačimo, se člen $(\gamma(b) - z)$ pokrajša:

$$\exp\left(-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u\right) = 1,$$

torej po posledici (1.12)

$$-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}\,\mathrm{d}u = 2\pi \mathrm{i}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

in

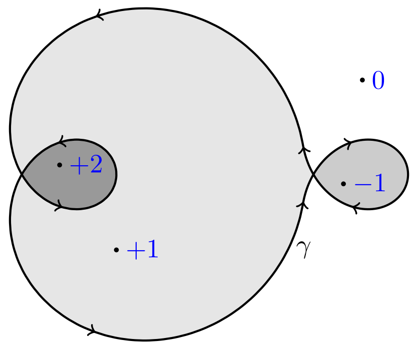
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \in \mathbb{Z}.$$

Na kratko $\mathrm{ind}_\gamma : D \to \mathbb{Z}$. Ker je to zvezna funkcija in ker slika v $\mathbb{Z}$, je ta funkcija konstantna na vsaki povezani komponenti od D. Naj bo z element neomejene komponente množice D. Označimo $M = \max_{t\in[a,b]} \dot{\gamma}(t)$. Imamo

$$\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_a^b \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{|\gamma(t)-z|}\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{d(\gamma^*,z)} = \frac{M(b-a)}{2\pi d(\gamma^*,z)}.$$

M, $b-a$ in 2π so končne in neodvisne od z. Ker pa je lahko z poljubno oddaljen od krivulje γ, je lahko razdalja $d(\gamma^*,z)$ poljubno velika in vrednost zgornjega izraza poljubno majhna. Že če pride vrednost pod 1, smo prepričani, da mora biti vrednost ind_γ enaka 0. Ker to velja za zelo oddaljene točke, mora zaradi zveznosti veljati na celotni neomejeni komponenti. □

Komponente primera območja D in ovojna števila so prikazana na sliki 1.2.



Slika 1.2: Primer poti γ in ovojnih števil (z modro).

Zgled 1.8. Naj bo γ enkrat pozitivno navita enotska krožnica s središčem v izhodišču. Izračunajmo $\mathrm{ind}_\gamma(0)$. γ parametriziramo kot $\gamma : \xi = e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - 0} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}}{e^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} 2\pi \mathrm{i} = 1.$$

Sedaj izračunajmo $\mathrm{ind}_\gamma(z)$, kjer je $z = re^{\mathrm{i}t}$ za $r < 1$:

$$\mathrm{ind}_\gamma(re^{\mathrm{i}t}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}}{e^{\mathrm{i}\varphi} - re^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}{(\cos\varphi - r\cos t) + \mathrm{i}(\sin\varphi - r\sin t)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ta integral je težko izvrednotiti, zato v praksi poiščemo "najlepšo" točko, tam poračunamo indeks in potem vemo, da je indeks na celotni komponenti enak.

Izračunajmo še bolj splošen primer: indeks točke α za n-krat navito krožnico po $S(\alpha, r)$. Parametriziramo $\gamma : \xi = \alpha + re^{\mathrm{i}\varphi}$ za $\varphi \in [0, 2n\pi)$.

$$\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - \alpha} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2n\pi} \frac{r\mathrm{i}e^{\varphi \mathrm{i}}}{\alpha + re^{\mathrm{i}\varphi} - \alpha}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2n\pi \mathrm{i}}{2\pi \mathrm{i}} = n$$

Izrek 1.25 (*Cauchyjev izrek*)**.** *Naj bo γ taka sklenjena odsekoma zvezno odvedljiva pot v neprazni odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$ za vsak $w \in \mathbb{C} \setminus D$. Tedaj za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Izrek lahko formuliramo tudi za območja: naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ območje (neprazna povezana odprta množica) in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo D omejeno območje v Ω, da je $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Naj bo ∂D sestavljen iz končnega števila gladkih kosov. Tedaj velja

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Opomba: formulaciji izreka sta skoraj ekvivalentni, razlika je le v tem, da se lahko pot navije večkrat, rob pa natanko enkrat. Tako je množica D v prvi formulaciji ekvivalentna množici Ω v drugi in γ je ekvivalentna ∂D. Vsekakor pa množica D v prvi formulaciji ni ekvivalentna množici D v drugi formulaciji. Predpostavka, da je indeks zunaj neke množice povsod enak nič, je ekvivalentna temu, da je ta množica povezana s potmi.

Dokaz. Dokažimo drugo formulacijo izreka pod predpostavko, da je f' zvezna. (To mora biti, ker je holomorfna, ampak tega nismo dokazali.) Spet pišimo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer je $u = \operatorname{Re} f$ in $v = \operatorname{Im} f$. Imamo

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial D} (u + \mathrm{i}v)(\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_{\partial D} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{\partial D} (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

Sedaj uporabimo Greenovo formulo in Cauchy-Riemannove enačbe:

$$\iint_D (-v_x - u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (u_y - u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D (u_x - u_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 + 0\mathrm{i}.$$

□

Zgled 1.9. Integrirajmo $f(z) = \frac{1}{z}$ na enotskem krogu $S(0, 1)$:

$$\oint_{\partial D(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}}{e^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

Zakaj nismo dobili rezultata 0? Na $D = D(0, 1) \setminus \{0\}$ je f holomorfna. Recimo, da je $\Omega = D(0, 1) \setminus \{0\}$. Ampak

$$D \cup \partial D = D(0, 1) \setminus \{0\} \cup S(0, 1) \cup \{0\} = \overline{D}(0, 1) \nsubseteq \Omega.$$

Rob območja D vsebuje tudi točko $\{0\}$, ki pa ni znotraj Ω.

Zgled 1.10. Izračunajmo integral funkcije $f(z) = z^{-n}$ na enotski krožnici. V prejšnjem zgledu smo ugotovili, da ima za $n = 1$ integral vrednost $2\pi\mathrm{i}$. Za vse nepozitivne n lahko uporabimo Cauchyjev izrek in dobimo vrednost nič. Za vse $n > 1$ pa uporabimo izrek (1.22) in prav tako dobimo vrednost nič.

$$\oint_{S(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Izrek 1.26 (*Cauchyjeva formula*). *Naj bo γ taka odsekoma zvezno odvedljiva sklenjena pot v neprazni odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$ za vse $w \in \mathbb{C} \setminus D$. Tedaj za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ in za vsak $z \in D \setminus \gamma^*$ velja*

$$f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

(Za območja) Naj bo Ω območje in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo D orientirano območje v Ω, za katerega velja $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Če je ∂D pozitivno orientiran, velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Dokaz. Dokažimo formulo za območja in spet predpostavimo, da je f' zvezen. Izberimo točko $z \in D \setminus \partial D$. Definirajmo

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z},$$

ki je holomorfna na $\Omega \setminus \{z\}$. Ideja je, da integriramo $g(z)$ po $\partial D \cup \partial D(z, r)$ in r pošljemo proti 0. Kako integriramo po dveh ločenih sklenjenih krivuljah? Ustvarimo pot med eno in drugo, ki deluje kot "most" (glej sliko 1.3). Najprej se sprehodimo po eni krivulji, dokler ne pridemo do mostu, potem gremo čez most in integriramo po drugi krivulji, se spet sprehodimo čez most in dokončamo preostanek prve. Ker smo most integrirali dvakrat in to v različnih smereh, se nam pri končni vrednosti ne bo poznal. Zato ni pomembno, kje si zamislimo most, važno je le, da poteka po definicijskem območju integranda. Označimo $\gamma_r = \partial D(z, r)$ in naj bo pozitivno orientirana. Uporabimo Cauchyjev izrek za g po $\partial D \cup \partial D(z, r)$. Ker je ∂D orientiran pozitivno, moramo po γ_r^* integrirati v negativno smer:

$$0 = \oint\limits_{\partial D \cup \gamma_r^-} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \oint\limits_{\partial D \cup \gamma_r^-} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \oint_{\partial D} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \oint_{\gamma_r^-} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - 2\pi \mathrm{i} f(z)\operatorname{ind}_{\partial D}(z) - \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Indeks ∂D v točki z je ena, če pa bi imeli splošno pot γ, pa bi ostal zraven $f(z)$. Zgornja formula velja za vsak $r > 0$, za katerega je $D(z, r) \subseteq D$. Dokazali bomo, da je

$$\lim_{r \to 0} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Sledilo bo

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi \mathrm{i} f(z)$$

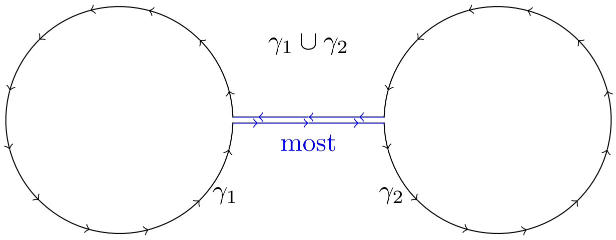
in dokaz bo zaključen. Poglejmo si naslednje:

$$\left| \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{\mathrm{i}t}) - f(z)}{z + re^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{i} r e^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \right| \le \int_0^{2\pi} |f(z + re^{\mathrm{i}t}) - f(z)|\,\mathrm{d}t.$$

Ker je f zvezna v z, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da je $|f(z + re^{\mathrm{i}\varphi}) - f(z)| < \varepsilon/2\pi$ za $0 < r < \delta$ in $t \in [0, 2\pi)$. Paziti moramo tudi, da velja $D(z, r) \subseteq D$, kar za dovolj majhne r drži. Imamo

$$\int_0^{2\pi} |f(z + re^{\mathrm{i}t}) - f(z)|\,\mathrm{d}t \le \varepsilon \implies \lim_{r \to 0} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

□



Slika 1.3: Prikaz, kako povežemo dve ločeni sklenjeni poti.

Posledica 1.27. *Naj bodo f, Ω, D in z definirani kot v predpostavkah Cauchyjeve formule za območja. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi.$$

Dokaz. Odvajamo Cauchyjevo formulo kot integral s parametrom n-krat. □

Posledica 1.28. *Naj bo f holomorfna funkcija na odprti množici D. Tedaj se f da razviti v potenčno vrsto na vsakem odprtem krogu $D(\alpha, r) \subseteq D$ kot*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

kjer so

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - \alpha)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi.$$

Dokaz. Izberimo $D(\alpha, r) \subseteq D(\alpha, R) \subseteq D$. Po Cauchyjevi formuli za vsak $z \in D(\alpha, r)$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi.$$

To lahko razvijemo v potenčno vrsto na vsakem krogu znotraj $D(\alpha, R)$ oziroma $D(\alpha, r)$. Formula za koeficiente sledi iz posledice 1.27. □

Definicija 1.21. *Odprt kolobar* A (annulus) je množica točk

$$A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - a| < R\}.$$

Zaprt kolobar $\overline{A}$ je množica točk

$$\overline{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - a| \leq R\}.$$

Izrek 1.29 (Cauchyjeva formula za kolobar). *Naj bo f holomorfna funkcija na okolici zaprtega kolobarja $\overline{A}(a,r,R)$. Naj $|\xi - a| = t$ označuje pozitivno orientirano krožnico s središčem v a in polmerom r. Za vsak $z \in \overline{A}(a,r,R)$ velja formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|z-a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Izrek 1.30 (Cauchyjeva ocena). *Naj bo $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj za vsak $z \in D(a,r)$ velja $|f(z)| \leq M$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja*

$$|f^{(n)}(a)| \leq M\frac{n!}{r^n}.$$

Dokaz. Naj bo $0 < \rho < r$, Uporabimo Cauchyjevo formulo na $D(a,\rho)$:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{S(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Imamo sledeče:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{S(a,\rho)} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+\rho e^{\mathrm{i}t})|}{|a+\rho e^{\mathrm{i}t} - a|^{n+1}} |\mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+\rho e^{\mathrm{i}t})|}{\rho^{n+1}} \rho\,\mathrm{d}\xi = \frac{n!}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t \leq M\frac{n!}{\rho^n}.$$

Sedaj pošljemo ρ proti r:

$$\lim_{\rho \to r} M\frac{n!}{\rho^n} = M\frac{n!}{r^n}.$$

□

Izrek 1.31 (Liouvilleov izrek). *Cela omejena funkcija je konstantna.*

Dokaz. Ker je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ omejena, obstaja tak $M \in \mathbb{R}^+$, da je $|f(z)| < M$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Naj bo $a \in \mathbb{C}$ in $D(a,r)$ krog s poljubnim polmerom. Po Cauchyjevi oceni velja

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}.$$

Ker je r lahko poljubno velik, je $\lim_{r\to\infty} \frac{M}{r} = 0$, zato je $f'(a) = 0$ za vsak $a \in \mathbb{C}$. Ker je f cela, je tudi holomorfna, torej lahko zapišemo sledeče:

$$0 = \int_a^z f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(z) - f(a).$$

Sledi

$$f(z) = f(a) = \text{konst.} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

Izrek 1.32 (osnovni izrek algebre). *Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo.*

Dokaz. Naj bo
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$
nekonstanten polinom s koeficienti iz $\mathbb{C}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $a_n = 1$. Definirajmo
$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}.$$
Vsaka racionalna funkcija je holomorfna na celotni kompleksni ravnini, razen v ničlah imenovalca. Če predpostavimo, da p nima ničle, potem je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna, in zato cela. Sedaj bomo dokazali, da je $f(z)$ omejena. Zapišimo $p(z)$ na sledeč način:
$$p(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right).$$
Uporabimo obrnjeno trikotniško neenakost ($||a| - |b|| \leq |a + b|$):
$$|p(z)| \geq |z|^n \left|1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - ... - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right|.$$
Za dovolj velike z bo vrednost znotraj velikih absolutnih vrednosti zelo blizu 1, člen $|z|^n$ pa bo zelo velik. Torej zagotovo obstaja tak z_0, da je $|p(z)| > 1$ za vsak $z \in \mathbb{C}, |z| > |z_0|$. Iz tega sledi, da bo $|f(z)| < 1$ za vsak dovolj velik $|z|$. Izven kroga s polmerom z_0 je torej f omejena, na zaprtem krogu $\overline{D}(0, |z_0|)$ pa je zaradi zveznosti na kompaktni množici tudi omejena. Ker je f cela in omejena, mora biti konstantna, torej mora biti tudi polinom $p(z)$ konstanten, kar pa ni v skladu s predpostavkami. Prišli smo do protislovja, torej mora imeti vsak nekonstanten polinom vsaj eno ničlo. □

Posledica 1.33. *Vsak nekonstanten polinom stopnje n ima n kompleksnih ničel, pri čemer k-kratne ničle štejemo k-krat. Krajše povedano, kompleksna števila so algebrsko zaprt obseg.*

Dokaz. Z indukcijo. □

1.10 Ničle holomorfnih funkcij

Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in D odprta množica. Naj bo $D(a, r) \subseteq D$ odprt krog. Vemo, da lahko znotraj $D(a, r)$ funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$
a je ničla funkcije f ($f(a) = 0$) natanko tedaj, ko velja $a_0 = 0$. Če je $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, potem je $f(z) = 0$ za vsak $z \in D(a, r)$ in velja tudi obratno. Predpostavimo, da obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_{m-1} = 0$ in $a_m \neq 0$. Funkcijo f lahko zapišemo kot
$$f(z) = (z - a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - a)^{n-m} = (z - a)^m g(z),$$
kjer je g neka druga holomorfna funkcija. Velja, da je konvergenčni radij g tudi enak r, ter $g(0) \neq 0$, saj $a_m \neq 0$. Ker je g zvezna, obstaja okolica točke a, na kateri g nima ničle. Za $b \neq a$ velja $f(b) = 0 \iff g(b) = 0$, zato je a na tej okolici edina ničla za f, čemur rečemo *izolirana ničla*. Definirajmo $h : D \to \mathbb{C}$ s predpisom
$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}; & z \in D \setminus \{a\}, \\ a_m; & z = a. \end{cases}$$
h je holomorfna na $D \setminus \{a\}$, saj je tudi $f(z)(z - a)^{-m}$ holomorfna. Ker je $h = g$ na $D(a, r)$, je h holomorfna na celotnem D. Velja $f(z) = h(z)(z - a)^m$ za vsak $z \in D$.

Definicija 1.22. Točka a je *stekališče* množice A, če je v vsaki okolici točke a kakšna od točke a različna točka iz množice A. Množica A je množica s stekališčem, če vsebuje kako svoje stekališče.

Izrek 1.34. *Naj bo D območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo $Z(f) = \{z \in D;\ f(z) = 0\}$ množica ničel funkcije f. Tedaj je $f = 0$ ali pa $Z(f)$ nima stekališča v D.*

Opomba: ker je D povezana, sta $\varnothing$ in D edini odprti in zaprti množici.

Dokaz. Naj bo A množica stekališč $Z(f)$ v D. Če je $A = \varnothing$, potem je vsaka ničla izolirana. Torej lahko za vsak $a \in Z(f)$ zapišemo $f(z) = (z-a)^{m_a} h(z)$ za nek $m_a \in \mathbb{N}$, iz česar sledi $f \neq 0$. Sedaj recimo, da $A \neq \varnothing$. Dokazali bomo, da je A hkrati odprta in zaprta, zato bo lahko veljalo le $A = D$.

Zaradi zveznosti je stekališče ničel funkcije f spet ničla. Ker je stekališče stekališč tudi stekališče, je A zaprta.

Naj bo $a \in A$. Iščemo tak $r > 0$, da je $D(a,r) \subseteq A$. Ker je D odprta množica, obstaja $r > 0$, da je $D(a,r) \subseteq D$. Na $D(a,r)$ razvijemo f v potenčno vrsto. Ker je a stekališče ničel, a ne more biti izolirana ničla. Sledi, da je $f = 0$ na nekem krogu $D(a,\rho)$. Ker so koeficienti potenčne vrste enaki pri obeh krogih, je $f = 0$ tudi na $D(a,r)$. Velja pa $D(a,\rho) \subseteq A$, zato je A neprazna odprta množica v D. Ker je D povezana množica in A tako odprta kot zaprta na D, je $f = 0$ na celotni množici D. □

Pokazali smo naslednje: če A nima stekališč v D, potem je vsaka ničla izolirana in za vsak $a \in Z(f)$ obstaja tak $m_a \in \mathbb{N}$, da je $f(z) = (z-a)^{m_a} g(z)$, kjer je g holomorfna funkcija na D.

Posledica 1.35. *Naj bo D območje in $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji. Če $f\big|_A = g\big|_A$, kjer je $A \subseteq D$ množica s stekališčem v D, potem je $f = g$. Temu se reče princip identičnosti.*

Dokaz. Vpeljimo novo funkcijo $h = f - g$. Velja $h\big|_A = 0$, torej je $A \subseteq Z(h)$. Ker ima A stekališče v D, je $h = 0$ na celotni množici D, torej je $f = g$ na D. □

Opomba: Pri Matematiki I smo spoznali funkcijo e^x za $x \in \mathbb{R}$ in smo ugotovili, da jo lahko zapišemo kot potenčno vrsto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

V zgledu 1.6 smo vzeli to izražavo, jo posplošili na vsa kompleksna števila in iz nje definirali kompleksno eksponentno funkcijo:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ali obstaja kakšna holomorfna funkcija, katere skrčitev na realno os je enaka funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$? Da, to je ravno funkcija e^z. Ali obstaja še kakšna drugačna holomorfna funkcija s to lastnostjo? Ne! Če imamo neko drugo holomorfno funkcijo $f(z)$, za katero velja $f(z) - e^z = 0$ za vse $z \in \mathbb{R}$, potem je $f(z) = e^z$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Ker pa je $\mathbb{R}$ množica stekališč, je $f(z) = e^z$ za vse $z \in \mathbb{C}$. Podobno lahko pokažemo za vse trigonometrične in hiperbolične funkcije. Ta zgled nam kaže, da obstaja kvečjemu ena holomorfna funkcija, ki določeno realno funkcijo posploši na kompleksno ravnino.

Posledica 1.36. *Naj bo f holomorfna funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{C}$ in množica $K \subseteq D$ kompaktna. Če je f neničelna, potem ima na K kvečjemu končno mnogo ničel, na D pa kvečjemu števno mnogo ničel.*

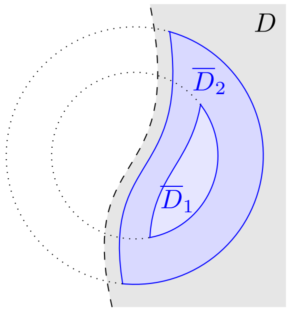
Dokaz. V množici K ima po definiciji vsako zaporedje stekališče. Če K vsebuje neskončno mnogo ničel funkcije f, potem ima neko zaporedje ničel stekališče v K. Po prejšnji trditvi 1.34 mora biti $f = 0$. Definirajmo

$$D_n = \{z \in D;\ |z| < n,\ d(z, \partial D) > 1/n\}$$

in

$$\overline{D}_n = \{z \in D;\ |z| \leq n,\ d(z, \partial D) \geq 1/n\}.$$

Velja $D_n \subseteq \overline{D}_n \subseteq D_{n+1} \subseteq ...$ (glej sliko 1.4).



Slika 1.4: Prikaz prvih dveh korakov kompaktnega izčrpanja neomejene odprte množice D.

Ker je

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n$$

in ker ima $f\big|_{\overline{D}_n}$ kvečjemu končno mnogo ničel, ima f na D kvečjemu števno mnogo ničel (števna unija končnih množic je števna množica). □

Opomba: v dokazu smo sestavili družino $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tako da $D_n \subseteq \overline{D}_n \subseteq D_{n+1}$ in da je $D = \bigcup_n D_n = \bigcup_n \overline{D}_n$. Taki družini rečemo *kompaktno izčrpanje* za množico D.

1.11 Razvoj v Laurentovo vrsto in tipi singularnosti

Naj bo funkcija f holomorfna na krogu $D(a, r)$. Tako funkcijo lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \forall z \in D.$$

Če f ni holomorfna na tem krogu, tak razvoj ne obstaja.

Definicija 1.23. Množici

$$D'(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z - a| < r\}$$

rečemo *punktiran ali preboden krog*.

Naj bo f holomorfna na $\overline{A} = \overline{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C},\ r \leq |z - a| \leq R\}$. Naj bosta $\gamma_1 = a + Re^{\mathrm{i}t}$ in $\gamma_2 = a + re^{\mathrm{i}t}$ za $t \in [0, 2\pi)$. Če je $z \in \overline{A}$, potem po Cauchyjevi formuli za kolobarje velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi.$$

Trditev 1.37 (razvoj v Laurentovo vrsto)**.** *Vsako holomorfno funkcijo f, definirano na okolici $\overline{A}(a,r,R)$ lahko razvijemo v Laurentovo vrsto. To pomeni, da lahko za vsak $w \in A(a,r,R)$ zapišemo*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(w-a)^n,$$

kjer je

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \qquad \text{za } n \geq 0$$

in

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \qquad \text{za } n < 0$$

ter $\gamma_1 = a + Re^{\mathrm{i}t}$ in $\gamma_2 = a + re^{\mathrm{i}t}$. Prva vrsta konvergira za vsak $w \in D(a,R)$ in se imenuje regularni del, druga vrsta pa konvergira za vse w zunaj $\overline{D}(a,r)$ in se imenuje glavni del. Vsoti vrst sta holomorfni funkciji na območjih konvergence.

Ker je f znotraj γ_1 in γ_2 holomorfna, so na tem območju integrali neodvisni od poti, po kateri integriramo. To pomeni, da lahko γ_1 in γ_2 homotopno nadomestimo z eno samo potjo γ, ki v celoti leži v kolobarju in je pozitivno orientirana (primer bi bil krožnica s polmerom $r < \rho < R$). Dobljena formula je:

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(w-a)^n, \quad \text{kjer je} \quad c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Vzemimo $z \in A(a,r,R)$. V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji oceni. Če je $\xi \in \gamma_2^*$, potem velja

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < \frac{R}{R} = 1.$$

če pa je $\xi \in \gamma_1^*$, pa velja

$$\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| < \frac{r}{r} = 1.$$

Sedaj uporabimo Cauchyjevo formulo za kolobar:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - a + a - z} \,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - a + a - z} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(z - a)\left(1 - \frac{\xi-a}{z-a}\right)} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \right)(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi \right)(z-a)^n.
\end{aligned}$$

Zaradi zgornjih neenakosti smo lahko izraza razvili v vrsti in zaradi enakomerne konvergence smo lahko zamenjali vrstni red integriranja in vsote. Integrali so neodvisni od izbranih robnih krožnic kolobarja, pomembno je le, da je z znotraj zunanje in izven notranje krožnice. Laurentova vrsta konvergira absolutno na $A(a,r,R)$ in enakomerno na kompaktih znotraj $A(a,r,R)$. □

Naj bo f holomorfna na $D'(a,r)$. Tedaj je f holomorfna na okolici kolobarja $\overline{A}(a,r_1,r_2)$, kjer je $0<r_1<r_2<r$. Zato ima f razvoj v Laurentovo vrsto znotraj $A(a,r_1,r_2)$. Ker lahko r_1 in r_2 izberemo poljubno z intervalov $r_1\in(0,r_2)$ in $r_2\in(r_1,r)$, dobimo razvoj v Laurentovo vrsto na $D'(a,r)$. Ker je razvoj neodvisen od izbire krožnic, res dobimo dobro definiran razvoj na $D'(a,r)$.

Definicija 1.24. Naj bo

$$f(z)=\ldots+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$$

Laurentov razvoj funkcije f na $D'(a,r)$. Točka a je:

i) *odpravljiva singularnost*, če je $c_{-1}=c_{-2}=\ldots=c_{-n}=\ldots=0$;

ii) *pol* reda $m\in\mathbb{N}$, če je $c_{-m}\neq 0$ in $c_{-n}=0$ za vsak $n>m$;

iii) *bistvena singularnost*, če je $c_{-m}\neq 0$ za neskončno mnogo $m\in\mathbb{N}$.

Če pri točki i) definiramo $f(a):=c_0$, potem smo f razširili na $D(a,r)$. Točka a je *izolirana singularnost* holomorfne funkcije f, če je f definirana na neki okolici U točke a brez točke a.

Zgled 1.11.

i) $f:D'(0,1)\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

točka 0 je odpravljiva singularnost.

ii) $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z/z^4$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{n!}=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{24}+\frac{z}{120}+\ldots,$$

točka 0 je pol reda 4.

iii) $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^{1/z}$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!},$$

točka 0 je bistvena singularnost.

Trditev 1.38. *Če je f holomorfna funkcija omejena na okolici izolirane singularnosti a, potem je a odpravljiva singularnost.*

Dokaz. Naj bo

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

Laurentov razvoj funkcije f okoli točke a. Preveriti moramo, ali je res $c_{-n}=0$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Naj bo $\gamma=a+re^{it}$ za $t\in[0,2\pi)$ neka krožnica okoli točke a v naši okolici. Ker je f omejena na okolici točke a, obstaja tak $M\in\mathbb{C}$, da je $|f(z)|<M$ za vsak $z\in D'(a,r)$. Imamo

$$|c_{-n}|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma\frac{|f(\xi)|}{|\xi-a|^{-n+1}}\,\mathrm{d}\xi\leq\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r}{r^{-n+1}}\,\mathrm{d}t=Mr^n.$$

Ker je f definirana na okolici a, lahko r pošljemo proti 0 in dobimo $c_{-n}=0$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. □

Izrek 1.39 (*Casorati-Weierstrassov izrek*)**.** *Naj bo a bistvena singularnost za holomorfno funkcijo f. Tedaj za vsak $w\in\mathbb{C}$, za vsak $\varepsilon>0$ in za vsak $\delta>0$ obstaja tak $z\in D'(a,\delta)$, da je $|f(z)-w|<\varepsilon$. Drugače povedano, slika vsake okolice bistvene singularnosti je gosta v $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Izreka ni težko dokazati, vendar ga pri pouku nismo. □

Definicija 1.25. Naj bo $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ funkcija na razširjeni kompleksni ravnini in naj bo $\hat{f}(z) = f(1/z)$.

- Točka ∞ je odpravljiva singularnost funkcije f, če je točka 0 odpravljiva singularnost funkcije $\hat{f}$.
- Točka ∞ je pol reda m funkcije f, če je točka 0 pol reda m funkcije $\hat{f}$.
- Točka ∞ je bistvena singularnost funkcije f, če je točka 0 bistvena singularnost funkcije $\hat{f}$.

1.12 Logaritem in potence

Definicija 1.26. Naj bo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Število $w \in \mathbb{C}$ je *logaritem* števila z, če velja $e^w = z$.

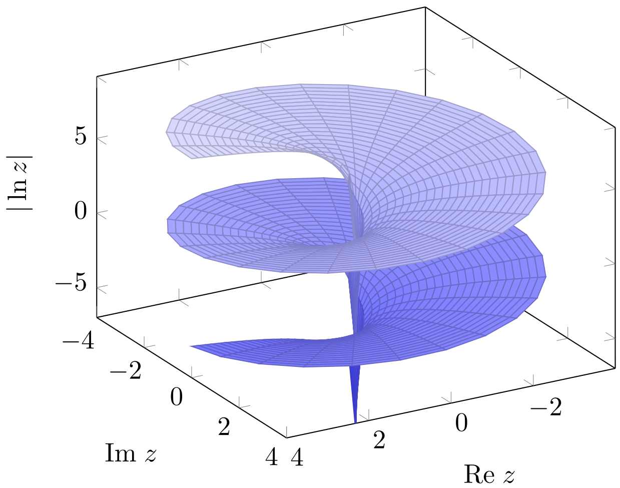
Pišimo $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ in $w = x + \mathrm{i}y$. Velja $e^x e^{\mathrm{i}y} = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Veljati mora $x = \ln r$ in $y = \varphi + 2k\pi$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. To lahko zapišemo kot

$$w = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi).$$

Običajno izberemo osnovno vejo logaritma, kjer je $k = 0$:

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

Na sliki 1.5 sta prikazani veji $k = 0$ in $k = 1$, ki sta zvezno združeni. Logaritem ponavadi definiramo na



Slika 1.5: Prikaz absolutne vrednosti kompleksnega logaritma, veji $k = 0$ in $k = -1$.

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. To naredimo zato, ker so v okolici točk z intervala $(-\infty, 0]$ točke z argumenti blizu $-\pi$ in $+\pi$ in tam funkcija ne bi bila zvezna. V splošnem pa lahko odrežemo poljuben poltrak iz izhodišča. Dokazali bomo, da je ln holomorfna funkcija na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Rečemo, da je holomorfna funkcija g logaritem funkcije f, če je $e^{g(z)} = f(z)$ za vsak $z \in D_f$.

Izrek 1.40. *Naj bo D tako območje v $\mathbb{C}$, da je $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus D$ in za vsako sklenjeno pot γ v D. Potem za vsako funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$, ki je holomorfna in brez ničel, obstaja holomorfen logaritem g funkcije f. Če sta g in h holomorfna logaritma funkcije f, potem velja $g - h = 2k\pi\mathrm{i}$ za nek $k \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Ker je $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus D$ in za vsako sklenjeno pot γ v D, je po Cauchyjevem kriteriju $\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Izberimo $w_0 \in D$ in tak $z_0 \in \mathbb{C}$, da je $e^{z_0} = f(w_0)$. Za $w \in D$ definirajmo

$$g(w) \coloneqq z_0 + \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z,$$

kjer je γ pot od w_0 do w. Funkcija g je dobro definirana natanko tedaj, ko je zgornji integral neodvisen od izbire poti γ. Naj bosta γ_1 in γ_2 dve različni poti znotraj D od w_0 do w. Ker po predpostavki velja

$$\oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} b(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

za poljubno holomorfno funkcijo b, sledi

$$\int_{\gamma_1} b(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} b(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ker f nima ničel na D, je f'/f holomorfna na D, zato lahko vzamemo $b = f'/f$ in dobimo, da je zgornji integral res neodvisen od izbire poti γ. Sedaj bomo dokazali, da je funkcija g res iskan logaritem. Vemo že, da je g holomorfna, in da velja $g' = f'/f$. Definirajmo funkcijo

$$h(w) = e^{-g(w)} f(w).$$

Ta je holomorfna na D in velja

$$h'(w) = -e^{-g(w)} g'(w) f(w) + e^{-g(w)} f'(w) = e^{-g(w)}(g'(w)f(w) - f'(w)) =$$

$$= e^{-g(w)}(f(w)f'(w)/f(w) - f'(w)) = e^{-g(w)}(f'(w) - f'(w)) = 0.$$

Ker je h zvezna, mora veljati $h(w) = C$ za nek $C \in \mathbb{C}$, kjer je C enak znotraj vsake komponente D. Velja

$$f(w) = Ce^{g(w)},$$

in ko v ta izraz vstavimo w_0, dobimo

$$f(w_0) = e^{z_0} = Ce^{g(w_0)} = Ce^{z_0},$$

torej je $C = 1$ in funkcija g je res iskani logaritem. Dokažimo še, da je razlika med dvema holomorfnima logaritmoma večkratnik števila $2\pi\mathrm{i}$. Naj bosta g_1 in g_2 holomorfna logaritma za funkcijo f. Imamo

$$e^{g_1(w)} = f(w) = e^{g_2(w)}.$$

Po posledici 1.12 sledi

$$g_1(w) - g_2(w) = 2k(w)\pi\mathrm{i},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$ lahko odvisna tudi od števila w. Velja

$$k(w) = \frac{g_1(w) - g_2(w)}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Ker sta g_1 in g_2 zvezni funkciji, mora biti tudi $k(w)$ zvezna. Ker pa je definirana na celih številih, mora biti povsod konstantna, torej je $g_1(w) - g_2(w) = 2k\pi\mathrm{i}$ povsod na D za nek fiksen $k \in \mathbb{Z}$. □

Posledica 1.41. *Izberimo $w_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Za vsak $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ velja*

$$\ln w = \ln w_0 + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

kjer je γ pot med w_0 in w. Ta funkcija je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Definicija 1.27. Za $\alpha \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiramo

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Funkcija $z \mapsto z^\alpha$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, saj je sestavljena iz kompozitumov in produktov holomorfnih funkcij na tem območju.

Obravnavajmo funkcijo $g(z) = \ln(1+z)$. Definirana je na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$. V realnih številih ima funkcija $\ln(1+x)$ smisel za $x > -1$. Lahko jo razvijemo v potenčno vrsto kot

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Konvergenčni polmer te vrste je $R = 1$. V točki $x = 1$ po Leibnizovem kriteriju konvergira, v točki $x = -1$ pa divergira. Potenčna vrsta torej konvergira na $(-1, 1]$. Ker vrsta konvergira v krajišču $x = 1$, je funkcija tam po *Abelovem izreku* zvezna.

Izrek 1.42 (Abel). *Naj bo*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom 1. Če vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira, potem je funkcija $G(x)$ zvezna levo od $x = 1$ oziroma

$$\lim_{x \to 1^-} G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Izrek velja tudi za kompleksne vrste ob dodatni predpostavki, da na poti, ko gre z proti 1, ta vedno leži znotraj enega Strolzovega izseka, to je območja na odprtem disku, kjer je $|1-z| \le M(1-|z|)$ za nek konstanten $M > 1$.

Izrek smo pri pouku samo omenili, da obstaja, in ga nismo niti natančno formulirali. Zgornjo realno potenčno vrsto, ki opisuje logaritem lahko enolično razširimo na celoten odprt enotski krog:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}.$$

Ta vsota konvergira tudi povsod na enotski krožnici razen v točki -1.

1.13 Izrek o residuih

Naj bo f holomorfna funkcija na $D'(a, R)$, naj bo $0 < r < R$ in naj bo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Laurentov razvoj funkcije f na disku $D'(a, R)$. Naj bo γ_r pozitivno orientirana krožnica okoli točke a s polmerom r. Imamo

$$\oint_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_r} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \right) \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{\gamma_r} c_n (z-a)^n \,\mathrm{d}z =$$

$$= c_{-1} \oint_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi \mathrm{i} c_{-1} \operatorname{ind}_{\gamma_r}(a) = 2\pi \mathrm{i} c_{-1}.$$

Zamenjavo vsote in integrala smo lahko naredili, ker potenčna vrsta konvergira enakomerno na kompaktih znotraj kolobarja. Od vsote je ostal samo člen s potenco -1, saj imajo vsi ostali členi primitivno funkcijo in se integrirajo v nič. Število c_{-1} se imenuje *residuum ali ostanek* in ga označimo kot $\operatorname{Res}(f, a)$.

Izrek 1.43 (*izrek o residuih*). *Naj bo f holomorfna funkcija na območju D razen na končni množici izoliranih singularnosti $a_1, a_2, ..., a_n \in D$. Naj bo γ taka sklenjena pot v D, da je $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Naj γ^* ne vsebuje nobene singularnosti $a_1, ..., a_n$. Tedaj velja*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \operatorname{ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Dokaz. Naj bo Q_k glavni del Laurentove vrste, ki pripada razvoju okoli izolirane singularnosti a_k. Definirajmo novo funkcijo

$$g := f - \sum_{k=1}^n Q_k.$$

Ker so Q_k glavni deli za f pri razvoju števil okoli a_k, so $a_1, ..., a_n$ odpravljive singularnosti za g. Zato z razširitvijo na a_k postane g holomorfna na celotnem območju D. Po Cauchyjevem izreku velja

$$\oint_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Sledi

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \sum_{k=1}^n Q_k(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \int_\gamma Q_k(z)\,\mathrm{d}z.$$

Vrstni red vsote in integrala smo lahko obrnili, ker je vsota končna. Po izreku (1.22) ali Cauchyjevem kriteriju (1.25) velja

$$\oint_\gamma Q_k(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{c_{-1}}{z - a_k}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} c_{-1} \operatorname{ind}_\gamma(a_k) = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Sledi

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \operatorname{ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k).$$

□

Trditev 1.44. *Naj bo a izolirana singularnost holomorfne funkcije f in hkrati pol stopnje n. Tedaj je*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}.$$

Opomba: $(n-1)$ v eksponentu označuje $n-1$-vi odvod.

Dokaz. Naj bo

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...$$

Laurentov razvoj okoli a. Množimo z $(z-a)^n$ in dobimo

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + ... + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + ...$$

Sedaj je a odpravljiva singularnost, zato lahko izvrednotimo funkcijo $(z-a)^n f(z)$ v a, vendar nam to še ne da pravega koeficienta. Naredimo $n-1$ odvodov:

$$((z-a)^n f(z))^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} + n!c_0(z-a) + (n+1)!c_1(z-a)^2 + ... = (n-1)!c_{-1} + g(z),$$

kjer je g neka holomorfna funkcija in $g(a) = 0$. Velja

$$c_{-1} = \frac{((z-a)^n f(z))^{(n-1)} - g(z)}{(n-1)!}.$$

Ko pošljemo z proti a, dobimo

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} ((z-a)^n f(z))^{(n-1)}.$$

□

Zgled 1.12. Obravnavajmo funkcijo $f(z) = \cos(z)/z^2$. Njen Laurentov razvoj je

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - ...$$

Očitno je $c_{-1} = 0$, zato je $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. Lahko pa določimo tudi preko formule (1.44):

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \left((z-0)^2 \frac{\cos z}{z^2}\right)' = \lim_{z\to 0} \cos(z)' = \lim_{z\to 0} -\sin(z) = 0.$$

Zgled 1.13. Poglejmo si še funkcijo $f(z) = \sin(z)e^{1/z}$. Kakšen je njen residuum v točki 0? Ker je točka 0 bistvena singularnost funkcije f si ne moremo pomagati z enačbo (1.44). Naredimo razvoj funkcije v potenčno vrsto:

$$f(z) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{-j}}{j!}\right).$$

Ker sta obe vrsti absolutno konvergentni na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, lahko njune člene množimo v poljubnem vrstnem redu. Osredotočimo se samo na člene, ki dajo potenco z^{-1}:

$$c_{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{5!6!} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n)!} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}_1(2) + \operatorname{bei}_1(2)) \approx 0{,}493\,067,$$

kjer sta $\operatorname{ber}_n(z)$ in $\operatorname{bei}_n(z)$ Kelvinovi funkciji definirani kot

$$\operatorname{ber}_n(x) + \mathrm{i}\operatorname{bei}_n(x) = J_n\left(xe^{3\pi \mathrm{i}/4}\right),$$

kjer je J_n Besselova funkcija prve vrste, definirana kot rešitev diferencialne enačbe

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2-n^2)y = 0.$$

1.14 Uporaba kompleksne integracije pri reševanju realnih integralov

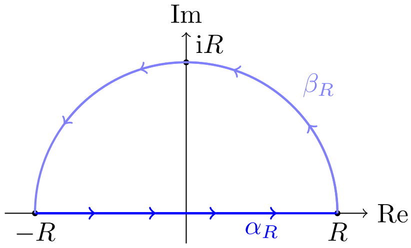
Zgled 1.14. Naj bo $R(\sin\varphi, \cos\varphi)$ trigonometrična racionalna funkcija. Rešujemo integral oblike

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pri Matematiki I bi tak problem rešili s pomočjo univerzalne trigonometrične substitucije $u = \tan(\varphi/2)$. Pri tem dobimo
$$\sin\varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$
Dobili bi mogoče (ampak ne nujno, ker bi bilo potrebno zelo paziti na meje)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$
in nato uporabili nastavek za splošno racionalno funkcijo ter izvrednotili dobljeno primitivno funkcijo na mejah integracije. V veliki večini primerov bi se s takim postopkom zelo zamudili. Opremljeni z znanjem kompleksne analize pa lahko uberemo kompleksno bližnjico: uporabimo substitucijo $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$. Dobimo
$$\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\varphi = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.$$
Z pridobljenim znanjem iz tega poglavja, si lahko integral poenostavimo na vsoto:
$$I = \oint_{\partial D(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{|z|<1}\mathrm{Res}(f,z).$$
Pri tem je
$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right).$$
Če želimo uporabiti to formulo, funkcija f ne sme imeti singularnosti na $\partial D(0,1)$.

Zgled 1.15. Za $a > 1$ izračunajmo integral
$$I = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\cos\varphi}.$$
Dobimo
$$I = \frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}.$$
Singularnosti integranda sta rešitvi kvadratne enačbe $z^2+2az+1=0$. To sta
$$z_1 = -a+\sqrt{a^2+1}, \quad z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}.$$
Očitno je $z_2 < -1$, za z_1 pa se izkaže, da je nekje na intervalu $z_1 \in (-1,0)$. Sledi
$$I = \frac{2}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,z_1) = 4\pi\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = 4\pi\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{4\pi}{z_1-z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$
Za primerjavo izračunajmo dani integral še z univerzalno trigonometrično substitucijo. Najprej ga prepišemo v bolj simetrično obliko kot
$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{a-\sin\varphi}.$$
Po substituciji dobimo
$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,\mathrm{d}u}{a(1+u^2)-2u} = \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(u-\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a^2}} = \frac{2}{a}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Zgled 1.16. Izračunajmo
$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$
Namesto da bi integrirali samo po realni osi, bomo sestavili sklenjeno pot po kompleksni ravnini in upali, da ves del, ki ni na realni osi ne prispeva ničesar k vrednosti integrala. Vzemimo sklenjeno pot, ki gre od



Slika 1.6: Pot integracije pri zgledu 1.16.

točke $-R$ do točke R po realni osi, nato pa se vrne v točko $-R$ po polkrožni poti preko točke iR (glej sliko 1.6). Označimo pot od $-R$ do R z α_R in polkrožni del z β_R. Skupno pot označimo $\gamma_R = \alpha_R \cup \beta_R$. Integrand ima dva pola, v $+\mathrm{i}$ in v $-\mathrm{i}$. Ko bo R šel proti neskončnosti, bo krivulja γ obkrožila točko $+\mathrm{i}$. Imamo

$$\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) - \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Velja

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^n f(z)\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^{-n}\right)^{(n-1)} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})^{-2n+1} = \frac{-\mathrm{i}(2n-2)!}{2((n-1)!)^2 4^{n-1}}.$$

Sledi

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{\pi(2n-2)!}{((n-1)!)^2 4^{n-1}}.$$

Dokažimo še, da je

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Označimo $B_R = Re^{\mathrm{i}t}$ za $t \in [0,\pi]$. Ocenimo

$$\left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}}{(R^2e^{2\mathrm{i}t}+1)^n}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}}{(R^2e^{2\mathrm{i}t}+1)^n}\right|\mathrm{d}t \le R\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{|R^2e^{2\mathrm{i}t}+1|^n} \le \frac{R}{(R^2-1)^n}\int_0^\pi \mathrm{d}t = \frac{\pi R}{(R^2-1)^n},$$

kar gre proti nič, ko gre R proti neskončno. V tretjem koraku smo uporabili inverzno trikotniško neenakost. Sedaj lahko napišemo

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{R\to\infty}\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi(2n-2)!}{((n-1)!)^2 4^{n-1}}.$$

Opomba: ta problem bi sicer znali rešiti tudi z uporabo znanja iz Matematike III. Uvedemo lahko namreč novo spremenljivko $t = x^2$. Ob upoštevanju sodosti funkcije dobimo

$$I = 2\int_0^\infty \frac{t^{-1/2}}{2(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{1/2-1}}{(1+t)^{n-1/2+1/2}}\,\mathrm{d}t = B\left(n-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)},$$

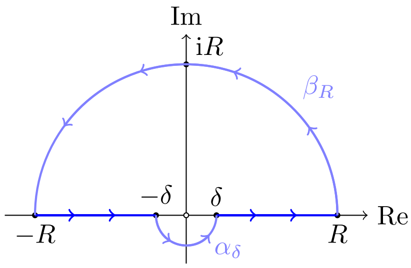
kjer je $B(p,q)$ Eulerjeva B funkcija in $\Gamma(u)$ Eulerjeva Γ funkcija. Bralec naj sam preveri, da sta oba rezultata enaka.

Zgled 1.17. Izračunajmo

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Če bi se tega problema lotili na enak način kot prejšnjega, bi naleteli na težavo, saj ima funkcija $f(x) = \sin x/x$ na grafu te poti singularnost (ki je sicer odpravljiva). Zato sestavimo nekoliko drugačno pot:

$$\gamma_{R,\delta} = [-R,-\delta] \cup \alpha_\delta \cup [\delta,R] \cup \beta_R,$$



Slika 1.7: Pot integracije v zgledu 1.17.

kjer je $\alpha_\delta : z = \delta e^{\mathrm{i}t}$ za $t \in [-\pi, 0]$ spodnja polovica kroga okrog izhodišča s polmerom δ in $\beta_R : z = Re^{\mathrm{i}t}$ za $t \in [0, \pi]$ zgornja polovica kroga okrog izhodišča s polmerom R. Krivulja je prikazana na sliki 1.7. Ugotoviti moramo še, katero funkcijo želimo integrirati. $\sin z/z$ bi delovalo, vendar lahko vzamemo tudi funkcijo $f(z) = e^{\mathrm{i}z}/z$ in gledamo samo imaginarni del. Cilj je, da integriramo po poti, predstavljeni zgoraj, in uporabimo limitni primer, ko gre $R \to \infty$ in $\delta \to 0$. Definirajmo naslednje:

$$I_{R,\delta} = \oint_{\gamma_{R,\delta}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z.$$

Po eni strani lahko to zapišemo kot integral po različnih odsekih poti, po drugi strani pa lahko uporabimo izrek o residuih, saj je znotraj krivulje vedno samo ena singularnost – točka 0. Velja

$$\begin{aligned} I_{R,\delta} = \oint_{\gamma_{R,\delta}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, 0) = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to 0} z\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to 0} e^{\mathrm{i}z} = 2\pi\mathrm{i} \\ &= \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x + \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z + \int_{\delta}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x + \int_{\beta_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Poglejmo si integrala po polkrogih v primernih limitah:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{1 + (\mathrm{i}z) + \dots}{z} \,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \left(\frac{1}{z} + g(z)\right) \mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \lim_{\delta\to 0} \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{i}\delta e^{\mathrm{i}t}}{\delta e^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi.$$

Ves preostanek Laurentove vsote za $e^{\mathrm{i}z}$ smo pospravili v funkcijo $g(z)$, ki je holomorfna (in omejena) na celem krogu $D(0, \delta)$, torej jo lahko na tem disku navzgor ocenimo z nekim maksimumom M. V limiti se dolžina poti, po kateri integriramo poljubno zmanjša, vrednost integrala g pa je navzgor ocenjena kot produkt M in dolžine poti. To pomeni, da je v limiti integral funkcije g po poti α_δ enak nič. Poglejmo si še drugi polkrog:

$$\int_{\beta_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{e^{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}}}{Re^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t.$$

Naredimo sledečo oceno:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t \right| \le \int_0^{\pi} \left| e^{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}} \right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left| e^{\mathrm{i}R(\cos t + \mathrm{i}\sin t)} \right| \mathrm{d}t \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin t} \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t} \,\mathrm{d}t \\ \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right). \end{aligned}$$

V računu smo uporabili neenakost $\sin x \ge 2x/\pi$ za $x \in [0, \pi/2]$. Sledi

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\beta_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \,\mathrm{d}z \right| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) = 0.$$

Dobimo

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} I_{R,\delta} = \pi\mathrm{i} + \lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} \int_{\delta}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}.$$

Sledi

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} \,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\pi\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}.$$

1.15 Izrek o odprti preslikavi in njegove posledice

Trditev 1.45. *Naj bo D območje in f neničelna holomorfna funkcija na D razen v nekaj singularnih točkah, ki so poli funkcije f. Naj bo $\overline{D}(a,r)$ zaprt krog v D in naj f' nima nobene ničle na $\partial D(a,r)$. Naj bosta $\mathcal{N}$ in $\mathcal{P}$ zaporedno število ničel in polov za f znotraj $D(a,r)$, pri čemer ničle in pole štejemo z večkratnostjo. Tedaj je*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathcal{N} - \mathcal{P}.$$

Opomba: če f v D nima polov, potem po predpostavkah trditve velja

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathcal{N}.$$

Dokaz. Naj bodo $\alpha_1, ..., \alpha_k$ in $\beta_1, ..., \beta_l$ zaporedoma vse različne ničle in vsi različni poli znotraj $D(a,r)$. Teh je končno, kar sledi iz posledice 1.36. Naj bodo $m_1, ..., m_k$ in $n_1, ..., n_l$ zaporedoma večkratnosti zgornjih ničel in polov. Za vsak $z \in D(a,r)$ velja

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (z-\alpha_k)^{m_k} \cdot (z-\beta_1)^{-n_1} \cdot ... \cdot (z-\beta_l)^{-n_l} \cdot g(z),$$

pri čemer je g funkcija brez polov in ničel v $D(a,r)$. Imamo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-\alpha_1} + ... + \frac{m_k}{z-\alpha_k} - \frac{n_1}{z-\beta_1} - ... - \frac{n_l}{z-\beta_l} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Uporabimo Cauchyjev izrek in dobimo

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(m_1 \operatorname{ind}_\gamma(\alpha_1) + ... + m_k \operatorname{ind}_\gamma(\alpha_k) - n_1 \operatorname{ind}_\gamma(\beta_1) - ... - n_l \operatorname{ind}_\gamma(\beta_l)\right) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z =$$

$$= m_1 + ... + m_k - n_1 - ... - n_l = \mathcal{N} - \mathcal{P}.$$

Zadnji člen je enak nič, saj funkcija $g'(z)/g(z)$ nima polov na $D(a,r)$. □

Naj bo D odprta množica in f holomorfna funkcija na D. Izberemo $\alpha \in D$ in izračunamo $\beta = f(\alpha)$. α reši enačbo $f(z) = \beta$ natanko tedaj, ko je α ničla funkcije $g(z) = f(z) - \beta$.

Izrek 1.46. *Naj bo f holomorfna funkcija na odprti množici D in naj bo $f(\alpha) = \beta$ za nek $\alpha \in D$. Naj bo α ničla reda n funkcije $g(z) = f(z) - \beta$. Tedaj obstajata taka odprta kroga $D(\alpha,\delta) \subseteq D$ in $D(\beta,\varepsilon)$, da ima za vsak $w \in D'(\beta,\varepsilon)$ enačba $f(z) = w$ natanko n različnih rešitev v krogu $D(\alpha,\delta)$.*

Dokaz. Dokaz smo izpustili. Naj bo $\delta > 0$ tako majhen, da je f holomorfna na okolici $\overline{D}(\alpha,\delta)$. Oglejmo si sklenjeno pot $\gamma : f \mapsto f(\alpha + \delta e^{\mathrm{i}t})$ za $t \in [0, 2\pi]$. Ker so ničle nekonstantne holomorfne funkcije izolirane, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je α v $D(\alpha,\delta)$ edina ničla za funkcijo $z \mapsto f(z) - \beta$ (sicer po potrebi krog zmanjšamo). Naj bo w blizu β. Potem iz neenačbe

$$|f(z) - w| = |f(z) - \beta + \beta - w| \geq |f(z) - \beta| - |\beta - w| > 0$$

sledi, da funkcija $z \mapsto f(z) - \beta$ nima ničel na $\partial D(\alpha,\delta)$. (Funkcija $z \mapsto |f(z) - \beta|$ je namreč pozitivna in zvezna na $\partial D(\alpha,\delta)$, zato doseže pozitivni minimum. Če izberemo $w \in D(\beta, |f(z) - \beta|)$, je torej

$|f(z) - w| > 0$.) Naj bo $\mathcal{N}(w)$ število rešitev enačbe $f(z) = w$ in podobno $\mathcal{N}(\beta)$ število rešitev enačbe $f(z) = \beta$. Znotraj $D(\alpha, \delta)$ je

$$\mathcal{N}(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial D(\alpha,\delta)} \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial D(\alpha,\delta)} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z = \mathrm{ind}_\gamma(w),$$

kjer je γ pozitivno orientiran rob diska $D(\alpha, \delta)$. Podobno dobimo $\mathcal{N}(\beta) = \mathrm{ind}_\gamma(\beta)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da krog $\overline{D}(\beta, \varepsilon)$ leži v isti komponenti $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ kot β. Ker je indeks na kompaktih od $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ konstanten, dobimo $\mathcal{N}(\beta) = \mathrm{ind}_\gamma(\beta) = \mathrm{ind}_\gamma(w) = \mathcal{N}(w)$. To pomeni, da ima za vsak $w \in D(\beta, \varepsilon)$ enačba $f(z) = w$ točno n rešitev. Dokazati moramo še, da so te rešitve različne. Če je z_0 ena od rešitev enačbe $f(z) = w$, potem je $f(z) - w = (z - z_0)^k g(z)$. Težava so večkratne ničle funkcije $z \mapsto f(z) - w$. Ker je $(f(z) - w)' = f'(z)$, lahko krog $D(\alpha, \delta)$ še dodatno zmanjšamo, da funkcija f' na tem krogu potencialno ničlo le v α. Zato funkcija f vsako vrednost $w \in D'(\beta, \varepsilon)$ zavzame v krogu $D(\alpha, \delta)$ v n različnih točkah. □

Opomba: $z = 0$ je za funkcijo $f(z) = z^n$ n-kratna ničla. Točka 0 je n-kratna ničla enačbe $z^n = 0$. Enačba $z^n = \alpha$ ima za $\alpha \neq 0$ na $\partial D(0, |\alpha|)$ natanko n različnih ničel. Enačba $z^n = 1$ ima na enotski krožnici n različnih ničel, imenovanih *koreni enote*.

Definicija 1.28. Preslikava $f : U \to \mathbb{C}$ je odprta, če je $f(V)$ odprta množica v $\mathbb{C}$ za vsako odprto množico $V \subseteq U$.

Ugotovimo lahko naslednje:

- funkcija f je zvezna natanko tedaj, ko je $f^{-1}(V)$ odprta v $\mathbb{C}$ za vsako odprto množico $V \subseteq \mathbb{C}$;
- funkcija f je odprta natanko tedaj, ko je $f(V)$ odprta v $\mathbb{C}$ za vsako odprto množico $V \subseteq U$;

Če je f bijekcija, velja, da je f zvezna natanko tedaj ko je f^{-1} odprta, in da je f^{-1} zvezna natanko tedaj, ko je f odprta. To povzamemo kot:

- funkciji f in f^{-1} sta obe zvezni natanko tedaj, ko sta obe odprti.

Izrek 1.47 (*izrek o odprti preslikavi*). *Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija na odprti množici D. Tedaj je f odprta preslikava.*

Dokaz. Naj bo $V \subseteq D$ odprta podmnožica. Dokazati moramo, da je $f(V)$ odprta v $\mathbb{C}$. Naj bo $b \in f(V)$. Tedaj obstaja tak $a \in V$, da je $f(a) = b$. Definirajmo $g(z) = f(z) - b$. Ker ima g ničlo v a, obstajata $D(a, \delta) \subseteq V$ in $D(b, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}$, da ima enačba $f(z) = w$ za vsak $w \in D(b, \varepsilon)$ n različnih rešitev znotraj $D(a, \delta)$. V posebnem primeru za vsak $w \in D'(b, \varepsilon)$ obstaja $z \in D(a, \delta)$, da je $f(z) = w$. Sledi $D(b, \varepsilon) \subseteq f(D(a, \delta)) \subseteq f(V)$. Ker je za nek $\varepsilon > 0$ in za vsak $b \in f(V)$ $D(b, \varepsilon) \subseteq f(V)$, je po definiciji $f(V)$ odprta in zato tudi f. □

Posledica 1.48. *Naj bo f taka holomorfna funkcija, definirana na okolici točke α, da $f'(\alpha) \neq 0$. Potem obstaja taka odprta okolica U točke α, da je preslikava $f : U \to f(U)$ bijektivna, njena inverzna preslikava f^{-1} pa tudi holomorfna.*

Dokaz. Dokažimo, da obstaja odprta okolica U, na kateri je funkcija injektivna. Ker je $f' \neq 0$, je f nekonstantna na nekem odprtem krogu okrog α. Oglejmo si funkcijo $g : f - f(\alpha)$. Velja $g(\alpha) = 0$ in $g'(\alpha) = f'(\alpha) \neq 0$, zato je α enostavna ničla. To pomeni, da po izreku 1.46 obstajata $\delta, \varepsilon > 0$, da ima za vsak $w \in D'(f(\alpha), \varepsilon)$ enačba $f(z) = w$ natanko eno rešitev znotraj $D(\alpha, \delta)$. Torej ima enačba $f(z_1) = f(z_2)$ natanko eno rešitev za $z_1, z_2 \in D(\alpha, \delta)$, iz česar sledi, da je $f : D(\alpha, \delta) \to \mathbb{C}$ injektivna. S tem smo našli odprto okolico $U = D(\alpha, \delta)$ točke α, na kateri je f injektivna, zato je $f : U \to f(U)$ bijekcija. Ker je f nekonstantna, je $f(U)$ odprta množica in $f : U \to f(U)$ odprta ter holomorfna, in zato je $f^{-1} : U \to f(U)$

zvezna. Po potrebi lahko zmanjšamo okolico U, da je $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in U$. Dokazati moramo še, da za vsak $w_0 \in f(U)$ obstaja limita $\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0}$. Upoštevamo $f(z) = w$ ter $f(z_0) = w_0$ in dobimo:

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

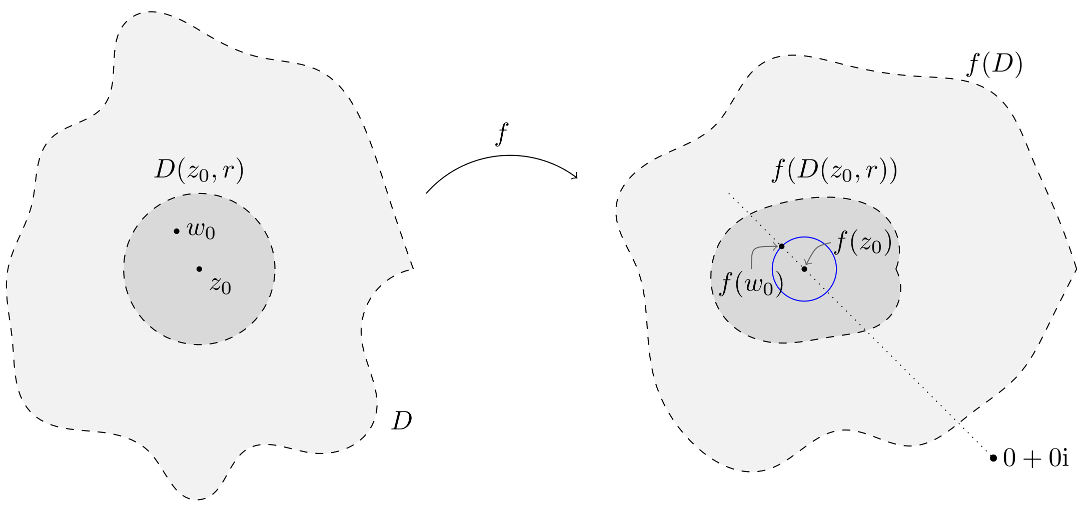
Ker odvod f ni enak nič, ta limita obstaja, zato je f^{-1} tudi holomorfna. □

1.16 Princip maksima in minima

Trditev 1.49 (*princip maksima in minima*)**.** *Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na odprti množici D. Tedaj $|f|$ ne zavzame maksimuma na D, minimum pa zavzame le v ničlah funkcije f.*

Dokaz.

1. **Maksima**: recimo, da $|f|$ doseže maksimum M v točki $z_0 \in D$, torej je $|f(z_0)| = M$ in $|f(z)| \leq M$ za vsak $z \in D$. Ker je f nekonstantna, je odprta preslikava, zato je $f(D)$ odprta množica in $f(D(z_0, r)) \subseteq f(D)$. Pri dokazu si pomagajmo s sliko 1.8. Naj bo $D(f(z_0), \rho)$ krog, ki leži v celoti



Slika 1.8: Grafični prikaz dokaza principa maksima in minima.

   znotraj $f(D(z_0, r))$. Premica skozi izhodišče in točko $f(z_0)$ seka krožnico $\partial D(f(z_0), \rho)$ (na sliki 1.8 označeno z modro barvo) v dveh točkah. Naj bo $f(w_0)$ bolj oddaljena od izhodišča. Tedaj je $|f(w_0)| \geq |f(z_0)|$, kar pa je protislovje.

2. **Minima**: ogledali si bomo funkcijo $\frac{1}{|f|}$. Če f nima ničle v D, potem obstaja $\frac{1}{|f|}$. Če $|f|$ doseže minimum v D, potem $\frac{1}{|f|}$ doseže maksimum, kar pa se po principu maksima ne more zgoditi.

□

Posledica 1.50. *Če je f nekonstantna holomorfna funkcija, definirana na odprti okolici kompaktne množice $K \subset \mathbb{C}$, potem $|f|\big|_K$ doseže maksimum v robnih točkah, minimum pa v robnih točkah ali ničlah funkcije f.*

Dokaz. Uporabimo princip maksima in minima. □

Opomba: Če je $f : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ zvezna in $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ holomorfna, in če $|f|$ doseže maksimum in minimum ter je nekonstantna, potem minimum in maksimum nista dosežena v notranjosti, ampak na $\partial D(a,r)$.

Lema 1.51 (*Schwarzeva lema*)**.** *Naj bo $f : D(0,1) \to D(0,1)$ taka holomorfna funkcija, da je $f(0) = 0$. Tedaj velja naslednje:*

i) $|f(z)| \leq |z|$ za vsak $z \in D(0,1)$;

ii) $|f'(0)| \leq 1$;

iii) če je $|f(z)| = |z|$ za nek $z \in D'(0,1)$ ali $|f'(0)| = 1$, potem obstaja tako število $\alpha \in \mathbb{C}$, da je $|\alpha| = 1$ in $f(z) = \alpha z$ za vsak $z \in D(0,1)$.

Dokaz.

i) Naj bo $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$ Laurentov razvoj za f na $D'(0,1)$. Ker je $f(0) = 0$, je $a_0 = 0$. Definirajmo novo funkcijo $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, $g : D'(0,1) \to \mathbb{C}$. Točka 0 je izolirana singularnost funkcije g in $g(z) = a_1 + a_2 z + ...$ je Laurentov razvoj za g na $D'(0,1)$. Ker je $a_{-n} = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$, je točka 0 odpravljiva singularnost za g in $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ je holomorfna funkcija. Velja $g(0) = f'(0) = a_1$. Naj bo $0 < r < 1$ in $z \in D'(0,r)$. Imamo

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = |g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Vrednost zgornjega izraza limitira proti 1, ko gre r proti 1. Ker to velja za vsak $z \in D(0,1)$, je $|f(z)| \leq |z|$.

ii) Velja

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}.$$

Torej je

$$|f'(0)| = \lim_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

po prejšnji točki.

iii) Recimo, da je $|f(z)| = |z|$ za nek $z \in D'(0,1)$ ali $|f'(0)| = 1$. Sledi $|g(z)| = 1$ za nek $z \in D'(0,1)$ ali $|g(0)| = 1$. Funkcija g slika iz $D(0,1)$ v $\overline{D}(0,1)$. Ker $|g|$ doseže maksimum v $D(0,1)$, mora biti po principu maksima in minima konstanta. Lahko zapišemo $\frac{f(z)}{z} = \alpha$ za vsak $z \in D(0,1)$ ali ekvivalentno $f(z) = \alpha z$. Ker velja $\frac{|f(z)|}{|z|} = 1$, je $|\alpha| = 1$.

□

1.17 Biholomorfne preslikave diska

Poiskali bomo vse bijektivne holomorfne funkcije $f : D(0,1) \to D(0,1)$, katerih inverzi so tudi holomorfni.

Definicija 1.29. Če ima holomorfna bijektivna preslikava holomorfen inverz, ji pravimo *biholomorfna preslikava*.

Za $\alpha \in D(0,1)$ definirajmo

$$f_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Opazimo $f_\alpha(\alpha) = 0$, saj izraz v imenovalcu ni enak nič ($|\alpha| < 1$). Funkcija $f_\alpha(z)$ je definirana, če $1 - \overline{\alpha} z \neq 0$ ali $z \neq \frac{1}{\overline{\alpha}}$. Sledi $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\} \to \mathbb{C}$. Ker je $|\alpha| < 1$ je $\frac{1}{|\alpha|} > 1$, zato je funkcija f zagotovo definirana na celotnem zaprtem enotskem krogu $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$.

Trditev 1.52. *Velja:*
1. $f_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$,
2. $f_\alpha(D(0,1)) = D(0,1)$,
3. $f_\alpha : \overline{D}(0,1) \to \overline{D}(0,1)$ *je bijekcija z inverzom* $f_{-\alpha}$.

Dokaz. Najprej dokažimo nekoliko šibkejši trditvi: $f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$ in $f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$.

1. Naj bo $|z| = 1$. Imamo
$$|f_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{\overline{z-\alpha}}{\overline{1-\overline{\alpha}z}}\right| = \left|\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{1-\alpha\overline{z}}\right| = \left|\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{1-\alpha/z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{z-\alpha}\right| |z| = |z| = 1.$$
Pri tem smo upoštevali, da je $\overline{z} = 1/z$. S tem smo pokazali, da je $f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$.
2. Naj bo $|z| < 1$. Če je $|f_\alpha(z)| > |\alpha|$, potem $|f_\alpha|$ doseže svoj maksimum v notranjosti $\overline{D}(0,1)$. Po principu maksima, bi morala biti f konstantna. Ker je $f\alpha(\alpha) = 0$ in $|f(z)| = 1$ za $z \in \partial D(0,1)$, to ni možno. Sledi $|f_\alpha(z)| < 1$. S tem smo pokazali, da je $f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$.
3. Za preslikavo $f_{-\alpha}$ veljata obe zgornji točki, saj je $|-\alpha| < 1$. Torej $f_{-\alpha}(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$ in $f_{-\alpha}(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$. Velja
$$(f_\alpha \circ f_{-\alpha})(z) = f_\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z} - \alpha}{1-\overline{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} = \frac{z+\alpha-\alpha-|\alpha|^2 z}{1+\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}z-|\alpha|^2} = z\frac{1-|\alpha|^2}{1-|\alpha|^2} = z$$
in
$$(f_{-\alpha} \circ f_\alpha)(z) = f_{-\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1+\overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z+\alpha-\alpha+|\alpha|^2 z}{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}z+|\alpha|^2} = z\frac{1+|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2} = z.$$
Torej je $f_{-\alpha}$ levi in desni inverz f_α: $f_\alpha \circ f_{-\alpha} = f_{-\alpha} \circ f_\alpha = \mathrm{Id}_{\overline{D}(0,1)}$.

Sedaj lahko dokažemo še enakost pri prvih dveh točkah. Velja
$$\partial D(0,1) = f_\alpha(f_{-\alpha}(\partial D(0,1))) \subseteq f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$$
in
$$D(0,1) = f_\alpha(f_{-\alpha}(D(0,1))) \subseteq f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1).$$
Ker smo z neenakostmi prišli do iste množice, morajo povsod veljati enakosti. Sledi
$$f_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1) \quad \text{in} \quad f_\alpha(D(0,1)) = D(0,1).$$
□

Izrek 1.53. *Vsaka bijektivna holomorfna preslikava* $f : D(0,1) \to D(0,1)$ *je oblike*
$$f(z) = w f_\alpha(z),$$
za nek $|w| = 1$ *in* $\alpha \in D(0,1)$.

Opomba: alternativno lahko to zapišemo kot
$$f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Dokaz. Ločimo dva primera.

1. $f(0) = 0$.
Po Schwarzevi lemi (1.51) je $|f(z)| \le |z|$ za vsak $z \in D(0,1)$. Dokazali bomo, da $|f(z)| = |z|$ za vse $z \in D'(0,1)$, za kar zadostuje, da dokažemo, da to velja za eno samo število z iz $D'(0,1)$. Ker je $f : D(0,1) \to D(0,1)$ bijektivna in holomorfna, je tudi $f^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$ bijektivna in

holomorfna [1]. Po Schwarzevi lemi za f^{-1} je $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ za vsak $z \in D(0,1)$. Velja $z = f(f^{-1}(z))$, zato je

$$|z| = |f(f^{-1}(z))| \leq |f(z)| \leq |z|.$$

Sledi $|f^{-1}(z)| = |f(z)| = |z|$. Po Schwarzevi lemi je $f(z) = \alpha z$ za nek $|\alpha| = 1$ za vse $z \in D(0,1)$:

$$f(z) = \alpha z = e^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-0}{1-\overline{0}z} = e^{\mathrm{i}\varphi} f_0(z).$$

2. Splošen primer, $f(0) = \beta$ za nek $\beta \in D'(0,1)$.
   Vzemimo $g := f_\beta \circ f : D(0,1) \to D(0,1)$, ki je holomorfna bijekcija in velja $g(0) = 0$. Po prvem primeru obstaja tak $|\alpha| = 1$, da je $g(z) = \alpha z$ za vsak $z \in D(0,1)$. Imamo $(f_\beta \circ f)(z) = \alpha z$ in

$$f(z) = f_\beta^{-1}(\alpha z) = f_{-\beta}(\alpha z) = \frac{\alpha z - \beta}{1 - \overline{\beta}\alpha z} = \alpha\frac{z + \overline{\alpha}\beta}{1 + \overline{\beta}\alpha z} = \alpha f_{-\overline{\alpha}\beta}(z).$$

Opomba: Dokazati moramo še, da je za holomorfno bijekcijo $f : D(0,1) \to D(0,1)$ tudi njen inverz holomorfna bijekcija. Zadostuje pokazati, da $f'(z) \neq 0$ za vsak $z \in D(0,1)$. Naj bo $\alpha \in D(0,1)$, $\beta = f(\alpha)$ in $g(z) = f(z) - \beta$. Točka α je enostavna ničla funkcije $g(z)$. Ker je $g'(\alpha) = f'(\alpha) \neq 0$, je kratnost ničle α enaka $n = 1$. Tedaj po 1.46 obstajata $D(\alpha,\delta)$ in $D(\beta,\varepsilon)$, da ima za vsak $w \in D'(\beta,\varepsilon)$ enačba $f(z) = w$ natanko $n = 1$ rešitev na $D(\alpha,\delta)$. Ker ima posledično enačba $f(z_1) = f(z_2)$ enolično rešitev v $D(\alpha,\delta)$, je f injektivna. Po posledici 1.48 velja, da je f^{-1} holomorfna z odvodom

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

□

1.18 Ulomljnene linearne preslikave

Definicija 1.30. *Ulomljena linearna preslikava* ali *Möbiusova transformacija* je preslikava oblike

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

za $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Podajmo nekaj očitnih lastnosti. Če $a \neq 0$ in $ac \neq bd$, potem je $-\frac{b}{a}$ ničla za f. Če $c \neq 0$ in $ac \neq bd$, potem je $-\frac{d}{c}$ pol stopnje ena za f. Funkcija f je definirana povsod na $\mathbb{C}$ razen mogoče v eni točki (v polu). Lahko pa definiramo

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{in} \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

če $c, a \neq 0$. Če pa $c = 0$ in $a \neq 0$, potem pa je $f(\infty) = \infty$, če $c = 0$ in $a = 0$, je $f(\infty) = \frac{b}{d}$. Na tak način lahko razširimo funkcijo na $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Preslikavi priredimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

in preslikavo s pripadajočo matriko A označimo z f_A.

Lema 1.54.

$$f_{AB} = f_A \circ f_B.$$

[1] Glej opombo na koncu dokaza.

Dokaz. Naj bosta
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$
Velja
$$(f_A \circ f_B)(z) = f_A(f_B(z)) = f_A\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h}+b}{c\frac{ez+f}{gz+h}+d} =$$
$$= \frac{aez+af+bgz+bh}{cez+cf+dgz+dh} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)} = f_C$$
za
$$C = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = AB.$$
□

Posledica 1.55. *Če je A obrnljiva, potem je $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.*

Dokaz.
$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_I = z = \mathrm{Id},$$
$$f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1}A} = f_I = z = \mathrm{Id}.$$
□

Trditev 1.56. *f_A je konstanta natanko tedaj, ko je* $\det A = ad - bc = 0$.

Dokaz. ($\Longleftarrow$) Če $\det A \neq 0$, potem je A obrnljiva in zato f_A ni konstantna.
($\Longrightarrow$) Naj bo $ad = bc$. Ločimo štiri primere.
Če $c \neq 0$ in $d \neq 0$, lahko pišemo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Imamo
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{\frac{b}{d}z + \frac{b}{d}\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{b}{d}\left(\frac{z+\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right) = \frac{b}{d}.$$
Če $c \neq 0$ in $d = 0$, mora biti $b = 0$. Dobimo:
$$f(z) = \frac{az+0}{cz+0} = \frac{a}{c}.$$
Če $c = 0$ in $d \neq 0$, mora biti $a = 0$. Dobimo:
$$f(z) = \frac{0z+b}{0z+d} = \frac{b}{d}.$$
Če $c = 0$ in $d = 0$, potem funkcija sploh ni nikjer definirana. □

Glede na izbiro števil a, b, c, d imamo štiri glavne tipe preslikav:

i) $a = 1$, $c = 0$, $d = 1$: $f(z) = z + b$ (translacija);

ii) $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $a > 0$: $f(z) = az$ (razteg ali *homotetija*);

iii) $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $|a| = 1$, $a = e^{\mathrm{i}\varphi}$: $f(z) = az$ (rotacija ali vrtež za kot φ);

iv) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$: $f(z) = \frac{1}{z}$ (*inverzija*).

Opomba: če $a \neq 0$, potem je $f(z) = az$ kompozitum ii) in iii):

$$z \overset{\text{ii)}}{\longmapsto} |a|z \overset{\text{iii)}}{\longmapsto} e^{\mathrm{i}\varphi}|a|z.$$

Trditev 1.57. *Vsaka ulomljena linearna transformacija z neničelno determinanto se da izraziti kot kompozitum preslikav tipa i), ii), iii) in iv).*

Dokaz. Ločimo tri primere.

1. $c = 0$, $d \neq 0$: $f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$:
$$z \overset{\text{ii), iii)}}{\longmapsto} \frac{a}{d}z \overset{\text{i)}}{\longmapsto} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$
2. $d = 0$, $c \neq 0$: $f(z) = \frac{az+b}{cz} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cz}$:
$$z \overset{\text{iv)}}{\longmapsto} \frac{1}{z} \overset{\text{ii), iii)}}{\longmapsto} \frac{b}{cz} \overset{\text{i)}}{\longmapsto} \frac{b}{cz} + \frac{a}{c}.$$
3. $c \neq 0$, $d \neq 0$: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-ad/c}{cz+d}$:
$$z \overset{\text{ii), iii)}}{\longmapsto} cz \overset{\text{i)}}{\longmapsto} cz + d \overset{\text{iv)}}{\longmapsto} \frac{1}{cz+d} \overset{\text{ii), iii)}}{\longmapsto} \frac{b-ad/c}{cz+d} \overset{\text{i)}}{\longmapsto} \frac{b-ad/c}{cz+d} + \frac{a}{c}.$$

$\square$

Lema 1.58. *Vsaka premica in krožnica se da zapisati kot*

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,$$

kjer sta $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ in $\beta \in \mathbb{C}$ ter velja $|\beta|^2 > \alpha\gamma$. Če $\alpha \neq 0$, potem je krivulja krožnica, sicer je premica.

Dokaz. Dokazujemo v obe smeri za vsak tip krivulje posebej.

- Dana je krožnica $|z - a| = r$ za $r > 0$. Imamo
$$r^2 = |z - a|^2 = \overline{(z - a)}(z - a),$$
$$|z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2 - r^2 = 0.$$
Dobimo $\alpha = 1$, $\beta = -\overline{a}$ in $\gamma = |a|^2 - r^2$. Preveriti moramo še, če je $|\beta|^2 > \alpha\gamma$:
$$|\beta|^2 - \alpha\gamma = |-\overline{a}|^2 - (|a|^2 - r^2) = r^2 > 0.$$
- Naj bo $\alpha \neq 0$ in naj velja $\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Nekoliko preuredimo, da dobimo
$$|z|^2 + \frac{\beta z}{\alpha} + \frac{\overline{\beta}\overline{z}}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$
$$\left(\overline{z} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(z - \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right) = \frac{|\beta|^2 - \gamma\alpha}{\alpha^2}$$
oziroma
$$\left|z + \frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \frac{|\beta|^2 - \gamma\alpha}{\alpha^2}.$$
To pa je ravno krožnica s polmerom $\frac{\sqrt{|\beta|^2-\gamma\alpha}}{\alpha}$ in središčem v $-\beta/\alpha$.

- Dana je premica, ki gre skozi točki $z_1 \neq z_2$: $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$; $t \in \mathbb{R}$. Velja
$$t = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}.$$
Uvedemo novo spremenljivko $w = \overline{z_2} - \overline{z_1}$. Dobimo
$$\frac{z - z_1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{w},$$
$$zw - z_1 w = \overline{z}\overline{w} - \overline{z_1}\overline{w},$$
$$\mathrm{i}zw - \mathrm{i}z_1 w - \mathrm{i}\overline{w}\overline{z} + \mathrm{i}\overline{w}\overline{z_1} = 0,$$
$$z(\mathrm{i}w) + \overline{z}(\overline{\mathrm{i}w}) + (-z_1\mathrm{i}w - \overline{z_1\mathrm{i}w}) = 0.$$
Velja $\beta = \mathrm{i}w$, $\alpha = 0$ in $\gamma = -z_1\mathrm{i}w - \overline{z_1\mathrm{i}w} = -2\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}z_1 w)$. Imamo še $|\beta|^2 - \alpha\gamma = |\mathrm{i}w|^2 = |w|^2 > 0$.
- Naj bo $\alpha = 0$ in $z = x + \mathrm{i}y$. Imamo
$$(x + \mathrm{i}y)\beta + (x - \mathrm{i}y)\overline{\beta} + \gamma = 0,$$
$$x(\beta + \overline{\beta}) + y(\mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\overline{\beta}) + \gamma = 0,$$
$$2x\mathrm{Re}\,\beta + 2y\mathrm{Im}\,\beta + \gamma = 0,$$
kar predstavlja premico.

□

Izrek 1.59. *Vsaka ulomljena linearna transformacija slika krožnice in premice v krožnice in premice.*

Dokaz. Ker je vsaka ulomljena linearna preslikava kompozitum preslikav i), ii), iii) in iv), je dovolj pokazati, da vsaka od njih ohranja družino premic in krožnic. Očitno premiki, raztegi in rotacije slikajo krožnice v krožnice in premice v premice, zato bomo dokazali le, da inverzija ohranja družino. Naj bo $f(z) = \frac{1}{z}$. Velja
$$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \overset{f}{\mapsto} \frac{\alpha}{|z|^2} + \frac{\beta}{z} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{z}} + \gamma = 0,$$
kar je ekvivalentno izrazu
$$\alpha + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma|z|^2 = 0.$$
Dobili smo $\alpha' = \gamma$, $\beta' = \overline{\beta}$ in $\gamma' = \alpha$. Velja $|\beta'|^2 - \alpha'\gamma' = |\beta|^2 - \gamma\alpha > 0$. □

Opomba: če je $\gamma = 0$ inverzija slika premice in krožnice v premice, sicer slika premice in krožnice v krožnice. Tukaj lahko interaktivno raziskuješ Möbiusove transformacije.

Möbiusove transformacije so grupa za kompozicijo, saj ima vsak element inverz in množica vseh transformacij je zaprta za kompozicijo. Ta grupa ima celo posebno ime: projektivna (splošna) linearna grupa $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ ali samo Möbiusova grupa. Vsako matriko A, ki predstavlja neko Möbiusovo transformacijo lahko pomnožimo s poljubnim neničelnim skalarjem (kompleksnim številom), pri tem pa se nam sama transformacija pri spremeni. Zato je vsaka taka transformacija ekvivalenčni razred splošne linearne grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (obrnljivih matrik 2×2) za množenje s skalarjem. To zapišemo kot $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{Z}(2,\mathbb{C})$. Ker lahko matriko A pomnožimo s takim številom, da je njena determinanta enaka 1, sama transformacija pa se ne spremeni, so Möbiusove transformacije pravzaprav tudi posebna projektivna grupa $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Izkaže pa se, da je Möbiusova grupa tudi tridimenzionalna kompleksna Liejeva grupa.

Izrek 1.60. *Naj bodo $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ različne točke ter $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ tudi različne točke. Tedaj obstaja natanko ena ulomljena linearna preslikava $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, za katero velja $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ in $f(z_3) = w_3$.*

Dokaz. Naj bodo $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ in $w_3 = \infty$. Poiščimo $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, da bo veljalo $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ in $f(z_3) = \infty$. Preprosto − taka preslikava je

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Če je slučajno ena od njih neskončno, dobimo naslednje rešitve:

$$z_1 = \infty : \quad f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3},$$

$$z_2 = \infty : \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3},$$

$$z_3 = \infty : \quad f(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

V splošnem vemo, da obstajata taki enolični transformaciji $f, g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, da je $f(z_1) = g(w_1) = 0$, $f(z_2) = g(w_2) = 1$ in $f(z_3) = g(w_3) = \infty$. Naj bo $h = g^{-1} \circ f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. To je ulomljena linearna preslikava, saj je inverz vsake ulomljene preslikave tudi ulomljena preslikava in kompozitum dveh le-teh tudi. Velja

$$h(z_1) = g^{-1}(f(z_1)) = g^{-1}(0) = w_1,$$
$$h(z_2) = g^{-1}(f(z_2)) = g^{-1}(1) = w_2,$$
$$h(z_3) = g^{-1}(f(z_3)) = g^{-1}(\infty) = w_3,$$

kar je naša iskana preslikava. Dokažimo še, da je h enolično določen. Naj obstaja še neka preslikava $h_1 : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, za katero veljajo iste lastnosti. Tedaj velja $g \circ h = g \circ h_1$ in

$$(g \circ h)(z_1) = (g \circ h_1)(z_1) = 0,$$

$$(g \circ h)(z_2) = (g \circ h_1)(z_2) = 1,$$

$$(g \circ h)(z_3) = (g \circ h_1)(z_3) = \infty.$$

Po prvem delu dokaza je $g \circ h = g \circ h_1 = f$, torej $h = h_1 = g^{-1} \circ f$. □

Zgled 1.18. Dana je transformacija

$$f(z) = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Določimo $f(\partial D(0,1))$. Določimo lahko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ki ima determinanto -2. Ker je f nekonstantna ulomljena linearna preslikava, je $f(\partial D(0,1))$ bodisi premica bodisi krožnica. Ker je $f(-1) = \infty$, je to premica. Velja $f(1) = 0$ in $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$, zato je to premica $\mathrm{Re}\ z = 0$. Če krožnico $\partial D(0,1)$ orientiramo pozitivno, je njena notranjost na levi strani tangentnega vektorja. Preslikana premica je zato orientirana navzdol, torej se notranjost kroga preslika v polravnino $\mathrm{Re}\ z > 0$ (na sliki 1.9 osenčeno). Velja $f(e^{\pi \mathrm{i}/6}) = -\mathrm{i}\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Zgled 1.19. Poiščimo ulomljeno linearno preslikavo, ki preslika D_1 na D_2, kjer je

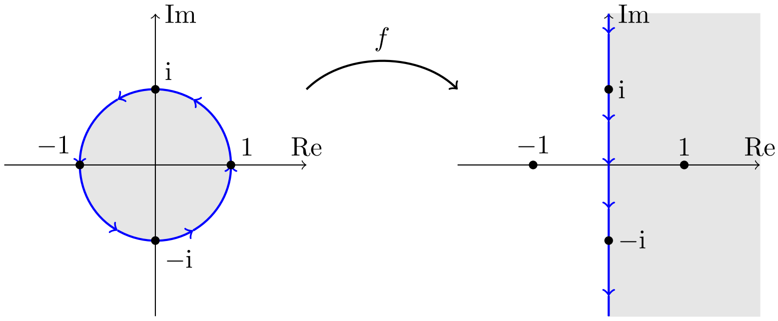
$$D_1 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z > 0\}$$

in

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\ z > 0, |z| < 1\}.$$

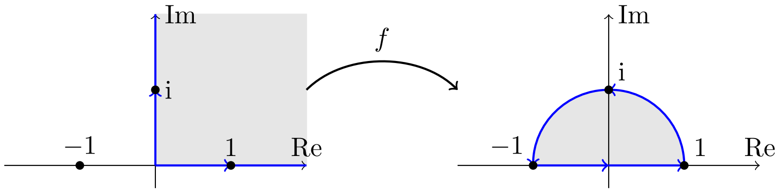
Rob območja D_1 je sestavljen iz dveh poltrakov: pozitivne realne in pozitivne imaginarne osi. Pri izbiri preslikave imamo nekoliko proste roke, zato si situacijo poenostavimo kolikor se le da. Slikajmo zgornji del imaginarne osi na daljico $[-1, 1]$, desni del realne osi pa na zgornjo polovico enotske krožnice. Orientirajmo obe osi od izhodišča navzven. Poiščimo preslikavo, ki slika $0 \mapsto 1$, $\mathrm{i} \mapsto 0$ in $\infty \mapsto -1$. Taka preslikava, ki ustreza tem pogojem je

$$f(z) = \frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z},$$



Slika 1.9: Prikaz, kako funkcija $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ slika enotsko krožnico.

ki je pravzaprav precej poznana preslikava, imenovana *Cayleyjeva transformacija*. Nastala daljica je orientirana v levo smer, zato bo območje D_2 nad to daljico (desno od tangentnega vektorja). Vsa teorija ulomljenih linearnih transformacij nam že zagotavlja, da se bo drugi poltrak slikal na zgornjo polkrožnico − gre skozi točko 0 in je pravokoten na imaginarno os, torej bo slika šla skozi točko 1 in bo pravokotna na realno os. Možnosti bi bili dve: bodisi je slika zgornja polovica enotskega kroga ali pa je slika poltrak $\mathrm{Re}\ z = 1$, $\mathrm{Im}\ z > 0$. Ker pa bi se v slednjem primeru sliki realne in imaginarne osi drugič sekali v neskončnosti, to ne mora biti res, saj naša preslikava slika točko neskončno v -1. Sledi, da se pozitivni del realne osi res slika v zgornjo polovico enotske krožnice, orientirane pozitivno. To preverimo z računom $f(1) = \mathrm{i}$. Območje D_1 je levo od orientirane realne osi, torej bo tudi levo od pozitivno orientirane krožnice − znotraj nje. Slika območja D_1 je torej nad realno osjo in znotraj enotske krožnice, kar je ravno D_2. Prikaz transformacije je na sliki 1.10.



Slika 1.10: Prikaz preslikave območja $\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z > 0$ s transformacijo $f(z) = \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$.

1.19 Homotopija in konformna ekvivalenca enostavno povezanih območij

Definicija 1.31. Naj bo D območje in $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ zvezni poti. *Homotopija* med γ_0 in γ_1 je zvezna preslikava $F : [0,1] \times [0,1] \to D$, da velja $F(t,0) = \gamma_0(t)$ in $F(t,1) = \gamma_1(t)$ za vsak $t \in [0,1]$.

Homotopija med γ_0 in γ_1 je zvezna deformacija med γ_0 in γ_1. Če za krivulji γ_0 in γ_1 obstaja homotopija v območju D, rečemo, da sta krivulji *homotopni* v območju D. Pretežno nas bodo zanimale homotopne sklenjene poti.

Zgled 1.20. Poiščimo homotopijo med $\partial D(0,1)$ in $\partial D(0,2)$. Parametriziramo $\partial D(0,1)$ in $\partial D(0,2)$ in vzamemo linearno kombinacijo med njima: $F(t,s) = (1+s)e^{2\pi \mathrm{i} t}$ za $s \in [0,1]$ in $t \in [0,1]$. Podobno lahko naredimo homotopijo med enotsko krožnico in izhodiščem: $F(t,s) = (1-s)e^{2\pi \mathrm{i} t}$.

Če nam območje D dopušča, je najlažja homotopija kar linearna kombinacija med γ_1 in γ_2: $F(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$.

Trditev 1.61. *Če sta γ_0 in γ_1 homotopni sklenjeni krivulji v območju D, potem je $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus D$.*

Posledica 1.62. *Če sta γ_0 in γ_1 homotopni sklenjeni krivulji v območju D, potem je*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$.

Dokaz. Definirajmo $\gamma \coloneqq \gamma_0 \cup \gamma_1^-$. Po trditvi 1.61 velja

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) - \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z)$$

za vsak $z \in D$. Po Cauchyjevem izreku dobimo

$$0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

Izrek 1.63. *Za območje $D \in \mathbb{C}$ so naslednje trditve ekvivalentne:*
1. *Množica $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ je povezana.*
2. *Vsaka sklenjena pot v D je homotopna konstantni poti (točki).*
3. *Za vsako sklenjeno pot γ v D je $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus D$.*

Dokaz. Dokaz presega ta predmet. Najde se ga v učbeniku od Magajne. □

Opomba: območje, ki zadošča katerikoli (in hkrati vsem) od zgornjih trditev se imenuje *enostavno povezano območje*. Vemo že, da če je D enostavno povezano, velja

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kjer je $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna in γ_1 ter γ_2 sta poti med z_1 in z_2. Posledica tega je, da je Stokesov izrek definiran samo na enostavno povezanih območjih.

Zgled 1.21. Območji $D(0, 1)$ in $|\operatorname{Re} z| < 1$ sta enostavno povezani. Za drugo območje ta trditev morda ni popolnoma očitna, saj je na videz območje $|\operatorname{Re} z| \geq 1$ sestavljeno iz dveh delov in zato ni povezano s potmi. Vendar pa dva dela lahko povežemo skozi točko neskončno.

Izrek 1.64 (*Riemannov upodobitveni izrek*)**.** *Vsako enostavno povezano območje $D \neq \mathbb{C}$ je biholomorfno/konformno ekvivalentno $D(0, 1)$.*

Dokaz. Dokaz in pravzaprav tudi izrek presega ta predmet. □

Opomba: v zgornjem izreku je poseben pogoj, da $D \neq 0$. Če bi obstajala biholomorfna preslikava s kompleksne ravnine v enotski disk, bi morala biti omejena in zato po Liouvilleovemu izreku 1.31 konstantna. Če pa je konstantna, pa ni biholomorfna.

1.20 Eulerjeva Γ funkcija

Definicija 1.32. Na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$ definiramo *Eulerjevo Γ funkcijo* s predpisom:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Izrek 1.65. *Naj bo D odprta množica in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje holomorfnih funkcij na D, ki konvergirajo enakomerno po kompaktnih podmnožicah v D proti f. Tedaj je f holomorfna.*

Dokaz. Naj bo $w \in D$ in $\overline{D}(z,r) \in D$ tak zaprt krog, da je $w \in D(z,r)$. Tak krog lahko vedno najdemo, saj je D odprta množica. Če dokažemo, da velja

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D(z,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi,$$

potem bo po Cauchyjevi formuli 1.26 funkcija f holomorfna na $D(z,r)$. Ker so f_n holomorfne, velja

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D(z,r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Sedaj pošljemo n proti ∞ in dobimo

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D(z,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Funkcija f je zvezna na D, saj je enakomerna limita po kompaktih zaprtih zveznih funkcij. Ker je konvergenca enakomerna, smo lahko zamenjali vrstni red limite in integrala. □

Opomba: če zaporedje f_n konvergira proti f po točkah in so f_n zvezne, potem f ni nujno zvezna. Primer je zaporedje $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. Vsi členi zaporedja so zvezni in po točkah konvergirajo k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

ki pa ni zvezna.

Izrek 1.66. *Funkcija Γ je holomorfna za vse z, kjer je $\operatorname{Re} z > 0$.*

Dokaz. Dokaz bomo samo skicirali. Najprej definiramo funkcijsko zaporedje

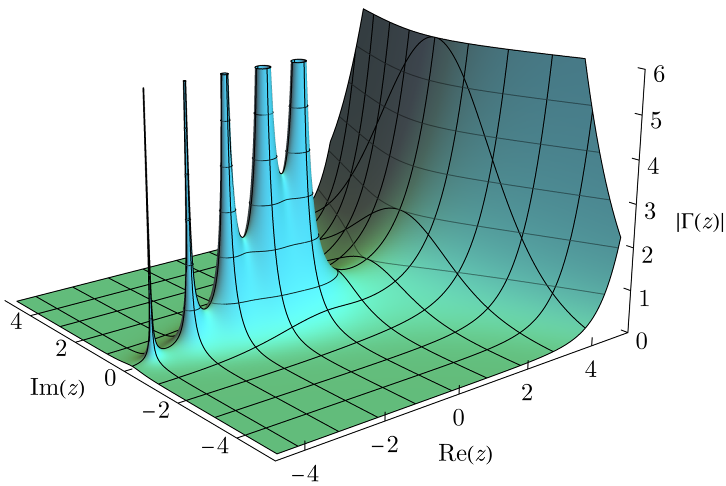
$$F_n(z) = \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Najprej dokažemo, da so F_n holomorfne. To naredimo s pomočjo teorije integralov s parametrom, ki smo se je učili pri Matematiki III. Nato dokažemo, da zaporedje F_n konvergira po kompaktih enakomerno proti Γ na $\operatorname{Re} z > 0$. Na koncu pa uporabimo prejšnji izrek. □

S pomočjo integriranja po delih lahko za Re > 0 dokažemo zvezo

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Ta formula nam na smiseln način omogoči, da funkcijo Γ razširimo na celotno kompleksno ravnino razen na premice $\operatorname{Re} z = -k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Ker vemo, da je $\Gamma(1) = 1$, ugotovimo, da na realni osi velja $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Izkaže se celo še več. To funkcijo lahko na smiseln način razširimo na celotno kompleksno ravnino razen na vsa nepozitivna cela števila, kjer nastanejo poli prve stopnje. Funkcija $\frac{1}{\Gamma(z)}$ pa je cela. Prikaz absolutne vrednosti Γ funkcije je na sliki 1.11.



Slika 1.11: Absolutna vrednost Eulerjeve Γ funkcije za kompleksna števila v bližini ničle.

Poglavje 2

Harmonične funkcije

Definicija 2.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica. *Dvakrat zvezno odvedljiva* funkcija $u : D \to \mathbb{R}$ je *harmonična*, če je

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_n x_n} = 0.$$

To lahko drugače zapišemo tudi kot

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Δ je diferencialni operator, imenovan *Laplaceov operator* ali Laplacian. V fiziki ga pogosteje označujemo kot ∇^2.

Zgled 2.1. Poiščimo vse harmonične funkcije na $\mathbb{R}$. Imamo $\Delta u = 0$, torej $u'' = 0$, ki ima rešitve $u(x) = Cx + D$ za $C, D \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Funkcija $u : D \to \mathbb{R}$ je *radialno simetrična*, če velja $u(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$, kjer je $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Zgled 2.2. Poiščimo vse radialno simetrične harmonične funkcije v $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Naj velja

$$u(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\right) = f(r),$$

kjer smo označili $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Ker mora veljati $\Delta u = 0$, si poglejmo parcialne odvode te funkcije:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f'(r)\frac{x_j}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f''(r)\frac{x_j}{r}\frac{x_j}{r} + f'(r)\frac{1}{r} + f'(r)x_j(-r^{-2})\frac{x_j}{r} = f''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}\left(1 - \frac{x_j^2}{r^2}\right).$$

Dobimo

$$\Delta u = f''(r) + (n-1)\frac{f'(r)}{r} = 0.$$

Uvedemo $g = f'$, s čimer dobimo separabilno diferencialno enačbo:

$$g'(r) = -\frac{n-1}{r}g(r)$$

s splošno rešitvijo

$$g(r) = \frac{D}{r^{n-1}}.$$

To še enkrat integriramo, pri čemer ločimo dva primera. Če je $n = 2$, dobimo

$$f(r) = D \ln |r| + E,$$

sicer pa

$$f(r) = \frac{D}{r^{n-2}} + E,$$

za neki konstanti $D, E \in \mathbb{R}$. Po navadi uvedemo posebne konstante:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}|$$

in

$$u(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^{2-n}}{(2-n)\omega_n},$$

kjer je

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

razmerje med površino n-sfere in $(n-1)$-vo potenco njenega polmera. Zgornjim funkcijam se reče tudi *Newtonovi potenciali*.

2.1 Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^2$

Harmonične funkcije na odprtih podmnožicah imajo povezavo s holomorfnimi funkcijami. Naj bo $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija za neko odprto množico $U \subseteq \mathbb{C}$. Naj bo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer je $u = \operatorname{Re} f$ in $v = \operatorname{Im} f$. Ker je f holomorfna, sta u in v parcialno odvedljiva:

$$f' = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

Odvod holomorfne funkcije pa je tudi holomorfna funkcija, zato lahko s pomočjo indukcije pokažemo, da sta u in v neskončnokrat parcialno odvedljiva v vseh vrstnih redih x in y. Velja $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ in podobno $\Delta v = 0$.

Trditev 2.1. *Realni in imaginarni del holomorfne funkcije $f : U \to \mathbb{C}$ sta harmonični funkciji. Na enostavno povezanih območjih je vsaka harmonična funkcija realni del neke holomorfne funkcije f.*

Dokaz. Naj bo U enostavno povezano območje v $\mathbb{R}^2$ in $u : U \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija. Iščemo $v : U \to \mathbb{R}$, da je $f := u + \mathrm{i}v$ holomorfna. Takšna funkcija v se imenuje *harmonična konjugiranka*. Vemo, da zadostuje, če je v diferenciabilen ter velja $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Vpeljemo $M := -u_y$ in $N := u_x$ ter si oglejmo $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y)) = (-u_y(x, y), u_x(x, y)).$$

Ker je $M_y = -u_{yy} = u_{xx} = N_x$ in ker je U enostavno povezano območje, je polje $\mathbf{F}$ potencialno. To pomeni, da obstaja $v \in \mathcal{C}^1$, da je $\mathbf{F} = \nabla v$ oziroma $(-u_y, u_x) = (v_x, v_y)$. Sledi $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$, kar pa je ravno Cauchy-Riemannov sistem enačb. Iz $\mathcal{C}^1$ sledi, da je funkcija v diferenciabilna. $\square$

Opomba: Naj bo $u : U \to \mathbb{R}$ harmonična ter $U \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, a ne nujno enostavno povezana. Za poljubno točko $a \in U$ lahko najdemo krog $\overline{D}(a, r) \subset U$. Ker je ta krog enostavno povezan in je $u : D(a, r) \to \mathbb{R}$ harmonična, obstaja taka harmonična funkcija $v : D(a, r) \to \mathbb{R}$, da je $f := u + \mathrm{i}v$ holomorfna na $D(a, r)$. Torej ta problem lahko lokalno rešimo, globalno pa samo, če imamo enostavno povezano območje.

Posledica 2.2. *Vsaka harmonična funkcija $u : U \to \mathbb{R}$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica, je razreda $\mathcal{C}^\infty$ (neskončnokrat zvezno odvedljiva).*

Dokaz. Vzemimo $a \in U$ in $D(a,r) \subseteq U$. Na $D(a,r)$ obstaja harmonična konjugiranka v, da je $f := u + \mathrm{i}v : D(a,r) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Sledi, da sta $u, v \in \mathcal{C}^\infty$. □

Izrek 2.3 (*izrek o povprečni vrednosti*)**.** *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in naj bo $u : U \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija. Naj bo $\overline{D}(a,r) \subset U$. Tedaj velja*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi.$$

Dokaz. Naj bo $R > r$ takšen, da bo $\overline{D}(a,r) \subset D(a,R) \subseteq U$. Funkcija u je harmonična na $D(a,R)$, torej obstaja taka holomorfna funkcija f na $D(a,R)$, da je $u\big|_{D(a,R)} = \mathrm{Re}\, f$. Ker je krog enostavno povezana množica, lahko uporabimo Cauchyjevo formulo:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{\mathrm{i}\varphi})}{re^{\mathrm{i}\varphi}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi,$$

kjer sta $u = \mathrm{Re}\, f$ in $v = \mathrm{Im}\, f$ realni funkciji. Sledi

$$u(a) = \mathrm{Re}\, f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi.$$

□

Opomba: velja tudi obratno: če funkcija zadošča lastnosti povprečne vrednosti, je harmonična. Tega ne bomo dokazovali, saj je dokaz predolg. Ker pravkar dokazana trditev velja v obe smeri, lahko rečemo, da lastnost povprečne vrednosti karakterizira harmonične funkcije.

Izrek 2.4 (*princip maksima in minima*)**.** Nekonstantna *harmonična funkcija u na* območju *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ ne more doseči ne maksimuma ne minimuma znotraj D. Na kompaktni množici K lahko zvezna funkcija, ki je harmonična znotraj K, doseže maksimum in minimum samo na robu množice K.*

Opomba: zakaj moramo imeti območje? Če območje ne bi bilo zahteva, bi lahko imeli množico, sestavljeno iz dveh nepovezanih odprtih komponent, pri čemer bi bila vrednost funkcije na eni enaka 1 in na drugi enaka 0. Ta funkcija bi bila zvezna, harmonična in nekonstantna, vendar bi dosegla maksimum povsod znotraj prve komponente in minimum povsod znotraj druge komponente. To pa je ravno v nasprotju z zgornjim izrekom.

Dokaz. Dokazali bomo le princip makisma, saj princip minima sledi iz principa maksima za funkcijo $-u$. Predpostavimo, da u doseže maksimum M v točki $a \in D$. Definirajmo $U = \{z \in D;\ u(z) = M\}$. Ker je točka a zagotovo v U, ta množica ni prazna ($U \neq \varnothing$). Velja

$$U = u^{-1}(\{M\}) = u^{-1}((\mathbb{R} \setminus \{M\})^{\complement}) = (u^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{M\}))^{\complement}.$$

Množica $\mathbb{R} \setminus \{M\}$ je odprta, zato je njena praslika tudi odprta, njen komplement pa je zaprt. Torej je množica U zaprta. Sedaj bomo dokazali še, da je U tudi odprta. Izberimo $a \in U$ in tak $r > 0$, da je $\overline{D}(a,r) \subset D$. Po izreku o povprečni vrednosti velja

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\mathrm{i}\varphi})\, \mathrm{d}\varphi.$$

Vrednost $u(a)$ pa lahko zapišemo tudi kot

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a)\, \mathrm{d}\varphi.$$

Ta dva izraza odštejemo in dobimo

$$\int_0^{2\pi} \left(u(a) - u(a + re^{i\varphi})\right) \, d\varphi = 0.$$

Označimo integrand z $v(\varphi)$. Ker je $u(a) = M$ maksimum funkcije u na množici D, je v nenegativna in zvezna ter velja $\int_0^{2\pi} v(\varphi)\, d\varphi = 0$, torej je $v(\varphi) = 0$ za vsak $\varphi \in [0, 2\pi]$. Sledi $M = u(a) = u(a+re^{i\varphi})$ za vsak $\varphi \in [0, 2\pi]$. Naj bo $R > 0$ tak, da je $\overline{D}(a, R) \subset D$. Za vsak $0 < \rho < R$ je po prejšnjem argumentu funkcija u konstantna na krožnici $\partial D(a, \rho)$. Ker velja $D(a, R) = \{a\} \cup \bigcup_{0<\rho<R} \partial D(a, \rho)$, je $u = M$ na $D(a, R)$, torej za vsako točko $a \in U$ obstaja taka okolica, ki je v celoti vsebovana v U. Po definiciji odprtosti je U odprta. Ker je U hkrati zaprta in odprta in ni prazna, mora veljati $U = D$, saj je D povezana. Ker pa je $u = M$ na celotnem območju D, je konstantna, kar pa je v nasprotju s predpostavkami izreka. Trditev o kompaktih sledi direktno iz tega, da u ne doseže maksimuma ali minimuma v notranjosti množice K. □

2.2 Poissonova formula in Poissonovo jedro

Definicija 2.3. Naj bo $\overline{D}$ zaprtje neke odprte množice $D \subset \mathbb{R}^2$. Iščemo zvezno funkcijo $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ za katero velja:

- $u\big|_D$ je harmonična,
- $u\big|_{\partial D} = g$ za neko vnaprej podano zvezno funkcijo g.

Tej nalogi rečemo *Dirichletov problem*.

Poiščimo rešitev za Dirichletov problem za $\overline{D}(0, 1)$. Iščemo torej tako zvezno funkcijo $u : \overline{D}(0, 1) \to \mathbb{R}$, za katero bo $u\big|_{\partial D(0,1)} = g$, ker je g neka podana zvezna funkcija, in $\Delta u\big|_{D(0,1)} = 0$.

Definicija 2.4. *Poissonovo jedro* je

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos\theta + r^2}$$

za $\theta \in \mathbb{R}$ in $0 \le r < 1$.

Velja

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Če pišemo $z = re^{i\theta}$, dobimo

$$P_r(\theta) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \overline{z}}{1 - \overline{z}}\right).$$

Trditev 2.5. *Poissonovo jedro je zvezna funkcija, za katero veljajo naslednje lastnosti:*

i) $P_r > 0$;
ii) $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$ *in* P_r *je* 2π *periodična;*
iii) *za* $0 \le \delta \le \theta \le \pi$ *velja* $P_r(\delta) \ge P_r(\theta)$;
iv) $\lim_{r \nearrow 1} P_r(0) = \infty$;
v) *za vsak* $\delta > 0$ *je* $\lim_{r \nearrow 1} P_r(\theta) = 0$ *enakomerno za* $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$.

Dokaz. Najprej pokažimo, da je $P_r(\theta)$ zvezna. To ne bi bilo res, če bi veljalo $1 - 2r \cos\theta + r^2 = 0$. To se lahko zgodi samo v primeru $\cos\theta = 1$ in $r = 1$, kar pa se ne more zgoditi, ker je $r < 1$.

i) Velja $1 - r^2 > 0$ in $1 - 2r \cos\theta + r^2 > 0$, zato je $P_r(\theta) > 0$.

ii) Ker je $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, sledi $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$.

iii) Če je $0 \le \delta \le \theta \le \pi$, je $\cos\theta \le \cos\delta$ in $1 - 2r\cos\delta + r^2 \le 1 - 2r\cos\theta + r^2$. Sledi $P_r(\theta) \le P_r(\delta)$.

iv)
$$\lim_{r\nearrow 1} P_r(0) = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1+r}{1-r} = \infty.$$

v) Fiksirajmo $\delta > 0$. Velja
$$\lim_{r\nearrow 1} P_r(\delta) = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} = \frac{0}{2-2\cos\delta} = 0.$$

Naj bo zdaj $\pi \ge |\theta| \ge \delta > 0$. Po točki iii) sledi $0 < P_r(\theta) \le P_r(\delta)$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja $r_0 < 1$, da je $P_r(\delta) < \varepsilon$ za vsak r, za katerega je $r_0 \le r < 1$. Ker je $0 < P_r(\theta) \le P_r(\delta) < \varepsilon$ za $r_0 \le r < 1$, limitira $\lim_{r\nearrow 1} P_r(\theta) = 0$ enakomerno za $\delta \le |\theta| \le \pi$.

□

Izrek 2.6 (*Poissonova formula*). *Za vsako funkcijo $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$, ki je zvezna na $\overline{D}(0,1)$ in harmonična na $D(0,1)$, velja*
$$u(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Opomba: imejmo Dirichletov problem na $\overline{D}(0,1)$ z robnim pogojem g. Po Poissonovi formuli velja
$$u(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} g(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Pri tem tiho preskakujemo med kompleksnimi števili in točkami v $\mathbb{R}^2$. Velja $re^{\mathrm{i}\varphi} = a + \mathrm{i}b \longleftrightarrow (a,b)$.

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je u harmonična na neki odprti okolici množice $\overline{D}(0,1)$. Tedaj obstaja holomorfna funkcija f, definirana na tej odpri okolici, da je $u = \operatorname{Re} f$. Naj bo $z \in D(0,1)$. Po Cauchyjevi formuli velja
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{1-\overline{\xi}z}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

To smo lahko naredili, saj je $\xi\overline{\xi} = 1$. Ker je $|z| < 1$, je funkcija $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{1-\overline{z}\xi}$ holomorfna na odprti okolici množice $\overline{D}(0,1)$ (pozor: to je malo drugačna funkcija kot prej). Po Cauchyjevem izreku velja
$$\oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{1-\overline{z}\xi} = 0.$$

Poglejmo si naslednje:
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\left(\frac{1}{1-\overline{z}\xi} - 1\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\frac{1-(1-\overline{z}\xi)}{1-\overline{z}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)\overline{z}}{1-\overline{z}\xi}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Združimo to in prejšnjo enakost:
$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\left(\frac{1}{1-\overline{\xi}z} + \frac{1}{1-\overline{z}\xi} - 1\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\frac{1-\overline{z}\xi+1-\overline{\xi}z-(1-\overline{\xi}z-\overline{z}\xi+|\xi|^2|z|^2)}{(1-\overline{\xi}z)(1-\overline{z}\xi)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}\xi|^2} f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}
\end{aligned}$$

Pišimo $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ in $\xi = e^{\mathrm{i}\theta}$. Dobimo

$$f(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})\frac{1-r^2}{|1-re^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}|^2}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

S tem smo dokazali izrek, če je u harmonična na neki odprti okolici zaprtega enotskega kroga. V splošnem primeru ni nujno tako. Naj bo $\rho \in (0,1)$ in definirajmo $u_\rho(z) = u(\rho z)$. Tedaj je u_ρ harmonična na odprti okolici zaprtega enotskega diska. Po pravkar dokazanem velja

$$u_\rho(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}u_\rho(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

za $0 \le r < 1$ in $\theta \in [0, 2\pi]$. Ker je u zvezna na kompaktni množici $\overline{D}(0,1)$, je tam enakomerno zvezna, bo tudi limita $\lim_{\rho\to 1} u_\rho$ konvergirala enakomerno. Dobimo

$$u(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

□

Posledica 2.7. *Za Poissonovo jedro velja*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = 1$$

Dokaz. Označimo integral z I. Če je $r=0$, je dokaz očiten. Predpostavimo $r \neq 0$. Velja:

$$I = -\frac{1-r^2}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos\theta - \frac{1+r^2}{2r}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1-r^2}{4\pi r}\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{1+r^2}{2r}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{1-r^2}{\sqrt{(1+r^2)^2-(2r)^2}} = \frac{1-r^2}{\sqrt{1-2r^2+r^4}} = \frac{1-r^2}{1-r^2} = 1.$$

Pri tem smo uporabili rezultat iz zgleda 1.15. □

Trditev 2.8 (rešitev Dirichletovega problema)**.** *Naj bo $g : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj obstaja natanko ena zvezna funkcija $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$, da velja $u\big|_{\partial D(0,1)} = g$ in $\Delta u = 0$ na $D(0,1)$.*

Dokaz. Dokazujemo enoličnost in eksistenco. Najprej bomo dokazali enoličnost. Recimo, da sta u_1 in u_2 dve rešitvi Dirichletovega problema. Naj bo $u = u_1 - u_2$. Velja, da je $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ zvezna, $u\big|_{\partial D(0,1)} = g - g = 0$ in $\Delta u = 0$ na $D(0,1)$. Ker u doseže maksimum in minimum na zaprtem krogu in je u harmonična v notranjosti, po principu maksima in minima doseže maksimum in minimum na robu. Velja $u \ge 0$ in $u \le 0$, zato je $u = 0$ na $\overline{D}(0,1)$ in sledi $u_1 = u_2$. Za dokaz eksistence definirajmo $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ za $z \in \partial D(0,1)$ s predpisom $u(z) = g(z)$ in za $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in D(0,1)$ s predpisom

$$u(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}g(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Trdimo, da tako definiran u reši Dirichletov problem. Preveriti moramo naslednje tri lastnosti:

1) $u\big|_{\partial D(0,1)} = g$. To drži po konstrukciji.

2) $\Delta u = 0$ na $D(0,1)$. Da to dokažemo, zadostuje, da pokažemo, da je u realni del neke holomorfne funkcije. Imamo

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)g(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\frac{1+re^{i(\varphi-\theta)}}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}g(e^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}g(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}g(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Funkcija $f(z) = \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$ je holomorfna na odprtem krogu $D(0,1)$, kar lahko dokažemo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto. Zato je $z \mapsto u(z)$ harmonična na $D(0,1)$

3) u je zvezna na $\overline{D}(0,1)$. Dokaz za ta del je daljši od zgornjih dveh, zato ga spustimo.

$\square$

2.3 Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^n$

Na $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ so radialno simetrične harmonične funkcije vse funkcije oblike

$$u(\mathbf{x}) = \frac{A}{|\mathbf{x}|} + B,$$

za $A, B \in \mathbb{R}$ ter $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Izberemo $B = 0$ in $A = -\frac{1}{4\pi}$ in dobimo

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|},$$

ki se imenuje *fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe*. Radialno simetrične harmonične funkcije glede na točko $\mathbf{x}_0$ so oblike

$$u(\mathbf{x}) = \frac{A}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + B$$

za $A, B \in \mathbb{R}$ in so harmonične na $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Kratka ponovitev potrebnih zvez iz kompleksne analize

Naj bo D omejeno odprto območje v $\mathbb{R}^3$ (ali v splošnem v $\mathbb{R}^n$), katerega rob je odsekoma zvezno odvedljiv in je orientiran v skladu z izbiro zunanje enotske normale. Taka definicija naj za D velja do konca tega podpoglavja. Parametrizacija roba kot ploskve je $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ pri čemer je $(u, v) \in A$. V višjih dimenzijah ima parametrizacija roba več parametrov. Naj bo $\mathbf{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje na $\overline{D} = D \cup \partial D$. Za skalarno funkcijo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ definiramo *gradient* kot

$$\mathrm{grad}\ f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r})\right).$$

Smiselno ga lahko posplošimo na več dimenzij kot

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Za vektorsko funkcijo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ definiramo *divergenco* kot

$$\mathrm{div}\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{r}) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{r}).$$

Tudi divergenco lahko po potrebi smiselno razširimo na več dimenzij:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Za integriranje po robovih območij velja *Gaussov izrek*:

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V.$$

Pri tem je ploskovni integral definiran kot

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \hat{\mathbf{n}} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Pri tem so

$$E = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2, \quad G = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2 \quad \text{in} \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Gaussov izrek za več dimenzij je zapisan identično, le kratnost integralov je večja:

$$\underbrace{\oint \cdots \oint_{\partial D}}_{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \underbrace{\int \cdots \int_D}_{n} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V.$$

Ker je takšen zapis precej nepriročen, se tipično za več kot tri dimenzije piše samo en integralski znak in se kratnost sklepa iz dimenzije. Gaussov izrek v dveh dimenzijah je ekvivalenten Greenovi formuli, v eni dimenziji pa osnovnemu izreku analize. Integral po robu več-dimenzionalnega območja je nekoliko zahtevnejši. Za opis roba n-dimenzionalnega območja potrebujemo $n-1$ parametrov. Normalni vektor lahko najdemo v vsaki točki roba ob predpostavki, da je rob odsekoma zvezno odvedljiv. Odvodi parametrizacije po $n-1$ parametrih v vsaki točki napenjajo $n-1$ dimenzionalni prostor, torej zagotovo obstaja, nek vektor, ki je pravokoten na vse te. V treh dimenzijah se ga preprosto poišče z vektorskim produktom, v več dimenzijah pa je več dela. Lahko se uporabi posplošeni vektorski produkt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \cdots & \hat{x}_n \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Tako bi integral po robu n-dimenzionalnega območja imel obliko (ob predpostavki da imamo primerno vektorsko polje $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo roba D kot $(u_1, ..., u_{n-1}) = \mathbf{r}(u_1, ..., u_{n-1}) : A \to \mathbb{R}^n$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_1, u_2, ..., u_{n-1})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \ldots \times \frac{\partial r}{\partial u_{n-1}}\right) \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

Normalni odvod funkcije u v točki $\mathbf{r}$ na ploskvi ∂D je definiran kot

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n},$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski normalni vektor na ploskev ∂D. Temu se reče tudi smerni odvod, saj lahko odvajamo v poljubni smeri $\mathbf{a}$. Lahko ga označimo tudi $\partial_{\mathbf{n}}$. Da se ga posplošiti tudi na več dimenzij. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ enotski normalni vektor na ∂D. Tedaj je

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla f)(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n},$$

kar je po zapisu identično tistemu v treh dimenzijah.

Zgled 2.3. Naj bo $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$. Izračunajmo normalni odvod funkcije $u : \mathbf{r} \mapsto \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ na sferi $\partial\mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)$. Naj bo $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \partial\mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)$. Velja

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Imamo
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}^3} = -\frac{x-x_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}.$$
Podobno dobimo
$$\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{r}) = -\frac{y-y_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{r}) = -\frac{z-z_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}.$$
Skupaj pride
$$\nabla u(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R^3}.$$
Normalo na sfero dobimo tako, da implicitno odvajamo enačbo za sfero
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$
najprej po x:
$$2(x-x_0)+2(z-z_0)z_x = 0 \implies z_x = -\frac{x-x_0}{z-z_0}$$
in potem še po y:
$$2(y-y_0)+2(z-z_0)z_y = 0 \implies z_y = -\frac{y-y_0}{z-z_0}.$$
Normala je
$$\mathbf{n} = (1,0,z_x)\times(0,1,z_y) = (-z_x,-z_y,1) = \left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0},1\right) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r_0}}{z-z_0}.$$
Vzamemo zunanjo enotsko normalo:
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R}.$$
Smerni odvod danega polja na sferi je torej enak
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R^3}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R} = -\frac{1}{R^2}.$$
Ta rezultat bomo v nadaljevanju uporabljali kot lemo.

Izrek 2.9 (*Greenove identitete*)**.** *Za poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji u in v na zaprti okolici območja D veljajo naslednje trditve:*

1)
$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_D (v\Delta u + \nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}V.$$
2)
$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}V.$$
3) Za vsak $\mathbf{r}_0\in D$ velja
$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{\partial D}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\iiint_D\frac{\Delta u}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\mathrm{d}V.$$

Te tri trditve se imenujejo 1., 2. in 3. Greenova identiteta.

Zapis Greenovih identitet v poljubni dimenziji je identičen, le da je kratnost integralov in dimenzija funkcij drugačna. Pri 3. Greenovi identiteti je namesto 4π v splošnem $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Dokaz.

1. Zapišemo smerni odvod po definiciji in uporabimo Gaussov izrek:

$$\oiint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial D} v(\nabla u\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial D} v\nabla u\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \nabla\cdot(v\nabla u)\,\mathrm{d}V = \iiint_D (v\Delta u + \nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}V.$$

Zadnji korak je bil izračunan s pomočjo sledečega pomožnega računa:

$$\nabla\cdot(v\nabla u) = \nabla\cdot(vu_x, vu_y, vu_z) = v_x u_x + vu_{xx} + v_y u_y + vu_{yy} + v_z u_z + vu_{zz} = v\Delta u + \nabla v\cdot\nabla u.$$

2. Ta identiteta sledi neposredno iz prve, zamenjamo u in v ter odštejemo.

3. Uporabimo 2. Greenovo identiteto za $v = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^{-1}$ za območje $D\setminus\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r_0},\delta)$, kjer je δ tako majhen, da je $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_0,\delta)\subset D$. Ko pošljemo $\delta\to 0$ dobimo iskano formulo. Paziti moramo, da je zunanja normala krogle $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_0,\delta)$ enaka notranji normali območja $D\setminus\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_0,\delta)$. Označimo $K_\delta = \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_0,\delta)$. Po 2. Greenovi identiteti imamo

$$\oiint_{\partial(D\setminus K_\delta)}\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_{D\setminus K_\delta}(u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V = \iiint_{D\setminus K_\delta}(-v\Delta u)\,\mathrm{d}V.$$

Prvi člen smo v zadnjem koraku črtali, saj je v harmonična na $D\setminus K_\delta$, zato je $\Delta v = 0$. Ostane nam še šest integralov, ki jih povezuje zveza

$$\oiint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}S + \oiint_{\partial K_\delta}\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}S = -\iiint_D v\Delta u\,\mathrm{d}V + \iiint_{K_\delta} v\Delta u\,\mathrm{d}V.$$

Drugi integral na levi ima pozitiven predznak, ker smo zamenjali smer normale. Členi, ki se tičejo območja D, so v Greenovi identiteti, člene, ki se tičejo krogle K_δ pa bomo izračunali v limiti $\delta\to 0$. Imamo

$$\iiint_{K_\delta} v\Delta u\,\mathrm{d}V = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\delta \frac{1}{\rho}\Delta u\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\delta \Delta u\rho\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Ker je u zvezna na kompaktni množici, zagotovo doseže maksimum M. Tedaj velja

$$\left|\iiint_{K_\delta} v\Delta u\right| \leq \left|\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\delta M\rho\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\right| = 2\pi|M|\delta^2.$$

Ko gre δ proti 0, gre tudi vrednost integrala proti 0. Naslednji integral je

$$\oiint_{\partial K_\delta} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta}\nabla u\cdot\hat{\mathbf{n}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Ker je u dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, je njen odvod (gradient) na kompaktni množici omejen, zato je tudi $\nabla u\cdot\hat{\mathbf{n}}$ omejen in mu lahko pripišemo maksimum M. Iz Matematike III vemo, da za sfero velja $\sqrt{EG-F^2} = \delta^2\sin\theta$. Velja

$$\left|\oiint_{\partial K_\delta} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S\right| \leq \left|\int_0^\pi\int_0^{2\pi} M\delta^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\right| = 4\pi|M|\delta^2,$$

kar gre proti 0, ko gre δ proti 0. Sedaj bomo pokazali, da velja

$$\oiint_{\partial K_\delta} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = u(\mathbf{r}_0).$$

To bomo storili tako, da bomo ocenili naslednji izraz, pri čemer bomo uporabili rezultat zgleda 2.3:

$$\left|\oiint_{\partial K_\delta} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S - 4\pi u(\mathbf{r}_0)\right| = \left|\oiint_{\partial K_\delta}\frac{u(\mathbf{r})}{\delta^2}\,\mathrm{d}S - 4\pi u(\mathbf{r}_0)\right| =$$

$$= \left|\oiint_{\partial K_\delta}\frac{u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0)}{\delta^2}\,\mathrm{d}S\right| \leq \oiint_{\partial K_\delta}\frac{|u(\mathbf{r} - u(\mathbf{r}_0))|}{\delta^2}\,\mathrm{d}S.$$

Ker je funkcija u zvezna na kompaktni množici, je enakomerno zvezna, zato obstaja tak $\delta_1 > 0$, da je $|u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0)| < \varepsilon$ za $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta_1$. Naj bo $0 < \delta_1 < \delta$. Tedaj velja

$$\oiint_{\partial K_\delta} \frac{|u(\mathbf{r} - u(\mathbf{r}_0))|}{\delta^2} \, \mathrm{d}S \leq \frac{1}{\delta^2} \oiint_{\partial K_\delta} \varepsilon \, \mathrm{d}S = 4\pi\varepsilon.$$

Ta izraz pa gre proti 0, ko gre δ proti 0, zato velja

$$\lim_{\delta \to 0} \oiint_{\partial K_\delta} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}S = 4\pi u(\mathbf{r}_0).$$

Izračunane limite vstavimo v 2. Greenovo identiteto in dobimo 3. Greenovo identiteto.

$\square$

Posledica 2.10. *Za vsako harmonično funkcijo u na okolici $\overline{D}$ velja*

$$\oiint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}S = 0.$$

Dokaz. Uporabimo 1. Greenovo identiteto za funkciji u in $v = 1$. $\square$

Izrek 2.11 (*izrek o povprečju*)**.** *Naj bo u harmonična funkcija na območju D in naj bo $\mathbf{r}_0 \in D$. Tedaj za vsak $R > 0$, za katerega je $\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_0, R) \subset D$, velja*

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} u(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}S.$$

Naj bo $\mathcal{K}^n(\mathbf{r_0}, R)$ n-dimenzionalna krogla s središčem v $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ in polmerom R ter

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Poljubno dimenzionalen izrek o povprečju se glasi:

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{\partial \mathcal{K}^n(\mathbf{r}_0, R)} u(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}V,$$

kjer je $\mathrm{d}V$ infinitezimalni košček $n - 1$ dimenzionalnega volumna roba n-krogle.

Dokaz. Uporabimo 3. Greenovo identiteto za $\mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)$:

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} \frac{\Delta u}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \, \mathrm{d}V.$$

Ker je u harmonična, je $\Delta u = 0$ in zadnji integral odpade. Imamo

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \, \mathrm{d}S =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \, \mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\partial \mathcal{K}(\mathbf{r}_0, R)} u(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}S.$$

Pri izpeljavi smo uporabili rezultat zgleda 2.3 in posledice 2.10. $\square$

Izrek 2.12 (*princip maksima in minima*)**.** *Nekonstantna harmonična funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ne more zavzeti niti maksimuma niti minimuma v D. Na kompaktnih množicah $K \subset D$ zvezna funkcija, ki je harmonična v notranjosti K, doseže maksimum in minimum na robu množice K.*

Dokaz. Kot v $\mathbb{R}^2$. $\square$

2.4 Dirichletov problem in Greenova funkcija

Definicija 2.5 (*Dirichletov problem*). Naj bo D omejeno območje in v $\mathbb{R}^3$ z gladkim robom. Naj bo $f : \partial D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Iščemo tako zvezno funkcijo $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$, da velja:

i) $u\big|_{\partial D} = f$ in

ii) $\Delta u = 0$ na D.

Rešimo problem v posebnem primeru, ko je robna funkcija

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

za nek $\mathbf{r}_0 \in \overline{D}$. Recimo, da je $v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ rešitev tega posebnega primera Dirichletovega problema za f kot robni pogoj. Uporabimo 2. Greenovo identiteto za funkcijo v in katerokoli harmonično funkcijo u:

$$\oiint_{\partial D} \left(u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathrm{d}S = \iiint_D (v\Delta u - u\Delta v) \, \mathrm{d}V = 0.$$

Smerni odvod deluje na funkcijo v v prvi spremenljivki. Obe funkciji u in v sta v notranjosti D harmonični, zato je njun Laplacian enak nič. Uporabimo še 3. Greenovo identiteto:

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial D} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \mathrm{d}S = \oiint_{\partial D} u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \mathrm{d}S.$$

Definicija 2.6. Funkcija

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \coloneqq v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

se imenuje *Greenova funkcija*. Normalni odvod Greenove funkcije v prvi spremenljivki pa se imenuje *Poissonovo jedro* za D.

Velja $G : \overline{D} \times D \to \mathbb{R}$ in $P = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} : \partial D \times D \to \mathbb{R}$. Poglejmo si nekaj lastnosti Greenove funkcije:

i) $\mathbf{r} \mapsto G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$ je harmonična na D in zvezna na $\overline{D}$;

ii) za $\mathbf{r} \in \partial D$ velja $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$ za vsak $\mathbf{r}_0 \in D$.

Obstoj Greenove funkcije se prevede na reševanje posebnega Dirichletovega problema in je zapleteno. Dokazali bomo enoličnost.

Naj bosta G_1 in G_2 Greenovi funkciji za območje D. Definirajmo $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Velja

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \left(G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) - \left(G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right),$$

zato je G zvezna na $\overline{D}$ in harmonična na D. Nadalje velja $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$ za $\mathbf{r} \in \partial D$. Po uporabi principa maksima in minima za $\mathbf{r} \mapsto G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ je $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$.

Zgled 2.4. Določimo Greenovo funkcijo za $D = \mathcal{K}(0, 1)$. Izberemo $\mathbf{r}_0 \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$. Definiramo vektor $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^2}$. To je tak vektor, da je $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = 1$, zato se imenuje zrcalna točka točke $\mathbf{r}_0$ glede na sfero $\partial\mathcal{K}(0, 1)$. Preverimo, da je funkcija

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)$$

Greenova funkcija za $\mathcal{K}(0, 1)$. Da to pokažemo, moramo preveriti, ali je $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$ harmonična na $\mathcal{K}(0, 1)$ in če je $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$ za $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{K}(0, 1)$. Najprej preverimo poseben primer, ko je $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{||\mathbf{r}_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0/|\mathbf{r}_0||} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right).$$

Preverimo prvo točko za splošen primer:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}=\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_0|}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}.$$

Ta funkcija je harmonična povsod, razen v točki $\mathbf{r}_1$. Ker je $|\mathbf{r}_0|<1$, je $|\mathbf{r}_1|>1$, zato je ta Greenova funkcija harmonična povsod na $\mathcal{K}(0,1)$. Da preverimo, ali res velja $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=0$ za vsak $\mathbf{r}\in\partial\mathcal{K}(0,1)$, zadostuje pokazati, da je $|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$. Lažje bo primerjati kvadrate:

$$|\mathbf{r}_0|^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2=\left||\mathbf{r}_0|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}\right|^2=|\mathbf{r}_0|^2|\mathbf{r}|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0+1=|\mathbf{r}_0|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0+1,$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2=|\mathbf{r}_0|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0+|\mathbf{r}|^2=|\mathbf{r}|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0+1.$$

Nadaljnji izračun pokaže, da je

$$P(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial\mathbf{n}}=\frac{1}{4\pi}\frac{1-|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}.$$

Greenove funkcije so nadvse uporabne pri reševanju linearnih diferencialnih enačb. Naj bo L linearen diferencialen operator in $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ podana funkcija. Recimo, da iščemo funkcijo $y:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ki zadošča enačbi

$$Ly(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}).$$

Najprej definirajmo Diracovo δ funkcijo kot mero:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0 \text{ za } \mathbf{r}\neq\mathbf{r}_0$$

in

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V=f(\mathbf{r}_0).$$

Če uspemo najti tako funkcijo G, za katero velja

$$LG(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

potem lahko y izrazimo kot

$$y(\mathbf{r}_0)=\int_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V.$$

Seveda mora Greenova funkcija zadoščati tudi robnim pogojem. V našem primeru velja $L=\Delta$ (Laplacian), ki da v splošnem Poissonovo enačbo ($\Delta y=f$), in Dirichletov robni pogoj (zvezno podane vrednosti na robu območja). Z nekaj teorije mere se lahko pokaže, da velja

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Na nek način smo to povedali že zgoraj, le da smo se izognili točki $\mathbf{r}_0$, kjer Laplaciana nismo znali definirati. Če temu dodamo katerokoli harmonično funkcijo v, bo Laplacian še vedno enak. Tako lahko dobimo Greenovo funkcijo, ki ustreza še robnim pogojem. Naj bo $\Delta u=f$ v notranjosti D in $u=g$ na robu D. Integral po volumnu s pomočjo Greenovih identitet spremenimo v integral po robu in dobimo

$$\int_D f(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V-u(\mathbf{r}_0)=\int_D(G\Delta u(\mathbf{r})-u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0))\,\mathrm{d}V=\int_D(G\delta u-u\delta G)\,\mathrm{d}V=$$

$$=\oint_{\partial D}\left(G\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}V=-\oint_{\partial D}u\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}V,$$

saj je $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=0$ za $\mathbf{r}\in\partial D$. Tako dobimo splošno rešitev Poissonove enačbe:

$$u(\mathbf{r}_0)=\int_D f(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V+\oint_{\partial D}g(\mathbf{r})P(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V,$$

kjer je $g(\mathbf{r}) : \partial D \to \mathbb{R}$ Dirichletov robni pogoj. V primeru Laplaceove enačbe in njenih harmoničnih rešitev je $f = 0$. Za kroglo $\mathcal{K}^n(0, R)$, $n > 2$, je Poissonovo jedro kar

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{R^2 - |\mathbf{r}_0|^2}{\omega_n R |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^n},$$

kjer je $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{K}^n(0, R)$ in $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{K}^n(0, R)$. Poleg Dirichletovega obstaja tudi Neumannov robni pogoj, ki vsaki točki na robu predpiše smerni odvod v smeri normale.

Poissonova enačba je zelo uporabna tudi v fiziki. Če imamo na območju D gostoto električnih nabojev ρ, potem dobimo električni potencial kot rešitev enačbe

$$\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Poglavje 3

Fourierova transformacija

3.1 Uvod v metrične prostore

Definicija 3.1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Nosilec* funkcije f je

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}}.$$

Zgled 3.1.

i) Očitno je $\operatorname{supp} \chi_{(a,b)} = \overline{(a,b)} = [a,b]$.

ii) Naj bo p polinom. Če je p ničeln, potem je $\operatorname{supp} p = \varnothing$, sicer pa $\operatorname{supp} p = \overline{\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}} = \mathbb{R}$.

V tem poglavju nas bodo zanimale zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem. Označimo $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, če je f zvezna in je $\operatorname{supp} f$ kompakten (veliki $\mathcal{C}$ označuje “continuous”, mali $_c$ pa “compact support”). Spomnimo, kaj je to metrika.

Definicija 3.2. *Metrični prostor* je urejen par (M, d), kjer je M množica, in d *metrika* na množici M, t. j. funkcija $d : M \times M \to \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim štirim aksiomom za vse $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetričnost),
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (trikotniška neenakost).

Metrični prostor je *poln* , če ima vsako Cauchyjevo zaporedje v njem stekališče. Zaporedje $x_1, x_2, ...$ v (M, d) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsa naravna števila $m, n > N$ velja $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Prostor $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ opremimo z metriko

$$d_1(f, g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}m,$$

kjer sta $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Integral zagotovo obstaja, saj sta f in g v resnici definirana samo na omejenih množicah, torej zgornji posplošeni integral ni zares posplošen. Funkciji sta zvezni, zato sta integrabilni. **Pozor**: ta integral ni več Riemannov, saj nas slednji preveč omejuje (na primer ne omogoča integrirati funkcije $\chi_{\mathbb{Q}}$). Namesto seštevanja navpičnih stolpcev se lahko integriranja lotimo tudi s seštevanjem Lebesgueove mere po vodoravnih vrsticah torej integriramo po kodomeni, ne domeni. Tako dobimo *Lebesgueov integral*, ki je bistveno bolj robusten in omogoča integriranje vseh Lebesgueovo merljivih funkcij. Za naše potrebe je to samo formalnost, namreč vsak Riemannov integral, ki obstaja, je enak Lebesgueovem integralu. Ker se bomo ukvarjali pretežno z odsekoma zveznimi funkcijami, za praktično uporabo zadošča

Riemannov integral, zato bomo od tu naprej integrale pisali ko Riemannove (je pa potrebno, da se bralec zaveda, da povsod v tem poglavju v ozadju v resnici leži Lebesgueov integral). Za kaj več bi se bilo potrebno poglobiti v teorijo mere. Očitno je, da d_1 zadošča vsem štirim aksiomom za metriko, zato $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), d_1)$ je metrični prostor, vendar ni poln. Za protiprimer polnosti se omejimo na interval $(-1, 1)$ in si poglejmo naslednje zaporedje

$$f_n = \begin{cases} nx; & |x| \leq 1/n, \\ 1; & x \in (1/n, 1], \\ -1; & x \in [-1, -1/n). \end{cases}$$

Za $m < n$ lahko ocenimo

$$d_1(f_m, f_n) = 2\int_0^{1/n} |(n-m)x| \,\mathrm{d}x + 2\int_{1/n}^{1/m} |1 - mx| \,\mathrm{d}x = \frac{n-m}{n^2} + \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

Za dovolj pozne m in n se ta vrednost približuje ničli, kar pomeni, da je zgornje funkcijsko zaporedje Cauchyjevo. Dokažimo, da za $\forall\varepsilon > 0$ točka $(\varepsilon, 1)$ leži na grafu limite zgornjega zaporedja. Preprosto vzamemo tak n_0, da je $1/n_0 < \varepsilon$. Grafi vseh funkcij f_n, kjer je $n > n_0$ bodo vsebovali točko $(\varepsilon, 1)$, in zato tudi limita. Podobno pokažemo, da limita vsebuje točko $(-\varepsilon, -1)$. Edina funkcija, ki ustreza tem pogojem, je *Heavisideova funkcija*:

$$H(x) = \begin{cases} 1; & x > 0, \\ 0; & x = 0, \\ -1; & x < 0. \end{cases}$$

Ta funkcija pa ni zvezna, kar pomeni da prostor $\mathcal{C}_c(-1, 1)$ ni poln v metriki d_1. Ta metrika se v resnici porodi iz 1-norme:

$$d_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x,$$

pri čemer sta f in g absolutno Lebesgueovo integrabilni funkciji. Velja tudi

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

V splošnem lahko za $p \geq 1$ definiramo p-normo kot

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

iz česar sledi p-metrika

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

pri čemer morajo seveda vsi Lebesgueovi integrali obstajati. Poseben primer p-norme je ∞-norma ali *maksimum norma*. Zanjo velja

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Za metriko, ki izhaja iz te norme, velja

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Vpeljimo oznako $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, če je f zvezna in $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ je gost podprostor v $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ glede na normo $\|\bullet\|_\infty$. Definirajmo nov metrični prostor, ki ga bomo označili z $L^1(\mathbb{R})$ na dva ekvivalentna načina:

1. Vzemimo metrični prostor $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), d_1)$. Ker ni poln, ga napolnimo z limitami vseh Cauchyjevih zaporedij v $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ oziroma njihovimi ekvivalenčnimi razredi glede na Lebesgueovo mero 0. Take funkcije niso nujno zvezne, niti nimajo nujno kompaktnega nosilca, vsekakor pa niso to vse funkcije. Tej napolnitvi rečemo $L^1(\mathbb{R})$.

2. $L^1(\mathbb{R})$ lahko definiramo tudi kot množico vseh ekvivalenčnih razredov (glede na mero 0) Lebesgueovo absolutno integrabilnih funkcij: $f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} |f| \, \mathrm{d}m < \infty$. Dve funkciji, ki se razlikujeta na množici z Lebesgueovo mero nič, bosta imela enako normo in bosta ekvivalentni, zato moramo vzeti samo ekvivalenčne razrede.

Iz vsake p-norme lahko definiramo L^p metrični prostor. Vzamemo množico vseh funkcij, katerih Lebesgueov integral je

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, \mathrm{d}m < \infty,$$

in jo opremimo z metriko d_p. Tako je prostor L^2 množica vseh s kvadratom integrabilnih funkcij, ki je dualen samemu sebi in še Hilbertov. Poseben primer je L^∞, ki je preprosto množica vseh omejenih funkcij. Množica $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ je podmnožica $L^\infty(\mathbb{R})$. Podobno kot s funkcijami lahko sestavimo metrične prostore za s p-to potenco sumabilne vrste in normo d_p, ki se označijo z l^p.

3.2 Fourierova transformacija

Definicija 3.3. Definirajmo preslikavo $\hat{\bullet} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ s predpisom

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Tej preslikavi rečemo *Fourierova transformacija*. Lahko jo označimo tudi kot $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$. Funkciji $\hat{f}$ rečemo *Fourierova transformiranka* funkcije f.

Opomba: ta funkcija obstaja, saj

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}| \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-\mathrm{i}x\xi}| \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Zadnji neenačaj sledi iz tega, da je f razreda $L^1(\mathbb{R})$.

Zgled 3.2. Naj bo $f = \chi_{[a,b]}$. Poiščimo njeno Fourierovo transformiranko.

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]} e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\mathrm{i}a\xi} - e^{-\mathrm{i}b\xi}}{\mathrm{i}\xi}.$$

Rezultat ni pretirano navdihujoč, zato si poglejmo, kaj dobimo na simetričnem intervalu $a = -c$ in $b = c$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(c\xi)}{\xi}.$$

Te funkcije ne znamo še enkrat transformirati, saj ni razreda $L^1(\mathbb{R})$.

Zgled 3.3. Naj bo $f = e^{-|x|}$. Poiščimo njeno Fourierovo transformiranko.

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-\mathrm{i}\xi)} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+\mathrm{i}\xi)} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\xi} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Ta funkcija je razreda $L^1(\mathbb{R})$, vendar bi se zelo namučili, če bi želeli direktno izračunati $\hat{\hat{f}}$. Če malo počakamo, bomo naleteli na nekaj trditev, ki bi nam to zelo olajšale.

Trditev 3.1. *Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj velja:*

1) $\hat{f}$ je zvezna in

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

2) Za $t \in \mathbb{R}$ definirajmo $e_t(x) = e^{\mathrm{i}tx}$. Tedaj je

$$\widehat{fe_t}(\xi) = \hat{f}(\xi - t).$$

3) Za $a > 0$ definirajmo $f_{[a]}(x) = f(ax)$. Tedaj je

$$\widehat{f_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a}\hat{f}(\xi/a).$$

4) Za $t \in \mathbb{R}$ definirajmo $f_t(x) = f(x - t)$. Tedaj je

$$\widehat{f_t}(\xi) = e^{-\mathrm{i}t\xi}\hat{f}(\xi).$$

5) Če je $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, potem je $\hat{f}$ odvedljiva in velja

$$\hat{f}'(\xi) = -\mathrm{i}\widehat{xf}(\xi).$$

6) Če je f zvezna in $f' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je

$$\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi).$$

Dokaz.

1) Najprej dokažimo neenakost. Imamo

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{\mathrm{i}x\xi}|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.$$

Iz tega lahko pokažemo (samo kot opomba, ni del dokaza), da za funkcijsko zaporedje f_n z limito f velja

$$|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| = |\widehat{f_n - f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_n - f\|_1.$$

Torej iz konvergence v L^1 sledi konvergenca po točkah Fourierovih transformirank. Dokažimo še, da je $\hat{f}$ zvezna.

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-\mathrm{i}x(\xi+h)} - e^{-\mathrm{i}x\xi}|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-\mathrm{i}xh} - 1|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)||e^{-\mathrm{i}xh} - 1|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)||e^{-\mathrm{i}xh} - 1|\,\mathrm{d}x.$$

Dobili smo dva integrala, katera bomo ocenili navzgor z $\varepsilon/2$ v limiti $A \to \infty$ in $h \to 0$. Drugi del je enostavnejši, saj je $f \in L^1(\mathbb{R})$. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $A > 0$, da je

$$\int_{|x|>A}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Drugi del integranda lahko ocenimo z $|e^{-\mathrm{i}xh} - 1| \leq 2$, zato dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)||e^{-\mathrm{i}xh} - 1|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za prvi integral uporabimo dejstvo, da je funkcija $x \mapsto e^{-\mathrm{i}x}$ zvezna. Naj bo $\delta > 0$, tako da je

$$|e^{-\mathrm{i}x\delta} - 1| \leq \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}.$$

Če je $|xh| < A|h| < \delta$, potem je

$$|e^{-\mathrm{i}xh} - 1| < \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}.$$

To vstavimo v prvi integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)||e^{-\mathrm{i}xh}-1|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)|\frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\|f\|_1}\int_{-A}^{A}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sledi

$$|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ta postopek deluje, če $\|f\|_1 \neq 0$. Če pa $\|f\| = 0$, potem je $f = 0$ skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero. Fourierov integral je enak nič, saj integriramo skoraj povsod ničelno funkcijo, zato je $\hat{f} = 0$, ki je zvezna. Naj še enkrat poudarimo, da pri teh dokazih nekoliko goljufamo, saj se pretvarjamo, da imamo Riemannove integrale, čeprav so v resnici Lebesgueovi.

2)

$$\widehat{fe_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}e^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x(\xi-t)}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi-t).$$

3) Uvedemo novo spremenljivko $y = xa$:

$$\widehat{f_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_{[a]}(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}y\xi/a}\,\frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

4) Uvedemo novo spremenljivko $y = x - t$:

$$\widehat{f_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}(y+t)\xi}\,\mathrm{d}y = e^{-\mathrm{i}\xi t}\hat{f}(\xi).$$

5) Tega dela ne bomo dokazovali, saj zahteva uporabo teorije mere. Če pokažemo, da lahko odvod po ξ premaknemo pod integral, lahko dokaz orišemo kot

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial\xi}e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\widehat{xf}(\xi).$$

6) Uporabimo per partes:

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\mathrm{i}\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi).$$

Da to res velja, moramo dokazati, da obstajata limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, če je $f' \in L^1(\mathbb{R})$, in da sta ti limiti obe enaki 0. Dokažimo za $x > 0$, za $x < 0$ je analogno. Uporabimo osnovni izrek analize:

$$f(x) = \int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x + f(0).$$

Ker je $f' \in L^1(\mathbb{R})$, integral $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergira, zato tudi $\int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, zato je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Limiti torej obstajata, ker pa je po predpostavki $f \in L^1(\mathbb{R})$ (je absolutno integrabilna), morata biti obe limiti enaki nič (sicer integrala ne bi konvergirala).

□

Opomba: iz $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ne sledi $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Povzetek relevantnih algebraičnih struktur

Algebraična struktura je neprazna množica, opremljena z eno ali več operacijami, ki izpolnjujejo predpisane pogoje (aksiome). Same operacije so lahko poljubno abstraktne, zato si je lastnosti vsake strukture najlažje predstavljati na podlagi najpreprostejšega predstavnika strukture. Ker smo različne strukture omenjali posamično pri vsaki od Matematik 1, 2, 3 in 4, je tukaj kratek nabor za lažje razumevanje tega poglavja.

- **Grupa** $(M, *)$: množica M, opremljena z asociativno operacijo $*$, za katero obstaja identiteta in za vsak element inverz. Primer je množica vseh obrnljivih matrik velikosti $n \times n$, opremljena z operacijo množenja med matrikami (reče se ji splošna linearna grupa, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$).
- **Abelova grupa**: komutativna grupa. Primer so realna števila, opremljena z operacijo seštevanja.
- **Komutativen obseg** $(M, +, \cdot)$: množica M, opremljena z dvema operacijama, imenovanima seštevanje $(+)$ in množenje $(\cdot)$; ta množica mora biti Abelova grupa za seštevanje z identičnim elementom $\mathbf{0}$; ta množica brez elementa $\mathbf{0}$ mora biti Abelova grupa za množenje z identičnim elementom $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$; množenje mora biti distributivno glede na seštevanje. Operaciji sta lahko bolj abstraktni, vendar morata zadoščati navedenim aksiomom. Primer so realna (tudi racionalna) števila z operacijama seštevanja in množenja.
- **Vektorski prostor** nad komutativnim obsegom $\mathbb{F}$: množica V opremljena z operacijo seštevanja in množenja s skalarjem. Elemente obsega $\mathbb{F}$ imenujemo skalarji, elemente prostora V pa vektorji. Vektorski prostor mora biti Abelova grupa za operacijo seštevanja, veljati pa morajo še štirje aksiomi za množenje s skalarjem ($a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $a(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{u}$, $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$). Primer so n-terice realnih števil ($\mathbb{R}^n$) nad obsegom realnih števil (to so vektorji, kot si jih predstavlja fizik). Med drugim pa so vektorski prostor tudi polinomi v kompleksnih številih, in celo množica $\{0\}$.
- **Vektorski prostor s skalarnim produktom** $(V, \langle \bullet, \bullet \rangle)$: vektorski prostor V opremljen s skalarnim produktom $\langle \bullet, \bullet \rangle$, ki mora biti konjugirano simetričen, linearen v prvem elementu in pozitivno definiten. Vsak skalarni produkt inducira normo. Primer je vektorski prostor $\mathbb{C}^n$ s standardnim skalarnim produktom.
- **Algebra** nad obsegom $\mathbb{F}$ $(V, +, \cdot)$: vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ opremljen z dodatno bilinearno operacijo $\cdot$ ("množenje"). Bilinearnost pomeni leva in desna asociativnost ter $(a\mathbf{v}) \cdot (b\mathbf{u}) = (ab)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$. Primer je vektorski prostor kvadratnih matrik $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad realnimi števili opremljen z operacijo množenja matrik.
- **Komutativna algebra**: algebra, z komutativno operacijo množenja. Primer so kompleksna števila kot vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ z operacijo kompleksnega množenja.
- **Metrični prostor** (M, d): množica M opremljena z metriko d. Definicija je v tem poglavju. Primer je $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), d_1)$.
- **Normiran vektorski prostor** $(V, \|\bullet\|)$: vektorski prostor, opremljen z normo. Norma je taka preslikava, ki je nenegativna, pozitivna za vse neničelne elemente, zanjo velja trikotniška neenakost in $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$. Vsaka norma inducira metriko, zato je vsak normiran prostor tudi metrični. Primer je $(L^1, \|\bullet\|_1)$.
- **Banachov prostor** $(V, \|\bullet\|)$: normiran vektorski prostor, ki je v inducirani metriki poln. Primer je $(L^1, \|\bullet\|_1)$.
- **Hilbertov prostor**: vektorski prostor s skalarnim produktom, ki je poln glede na metriko, ki jo inducira skalarni produkt. Paradni primer je $L^2(\mathbb{R})$.
- **Banachova algebra** $(V, +, \cdot)$: algebra, ki je hkrati tudi Banachov prostor. Da je to res, mora biti norma submultiplikativna glede na operacijo "množenja". Primer je $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$, kjer $*$ označuje konvolucijo.

3.3 Konvolucija

Definicija 3.4. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Konvolucija* je operacija, dana s predpisom

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Če sta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potem $f * g$ obstaja, saj integral konvergira absolutno. Če sta f in g zvezni in ima ena kompakten nosilec, potem $f * g$ obstaja. Če sta $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, potem je $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Trditev 3.2. *Za $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja*
i) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$,
ii) $f * g = g * f$,
iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Dokaz. Prvi dve enakosti sledita iz linearnosti in komutativnosti integrala, zadnjo pa je precej težko dokazati in zahteva uporabo Fubinijevega izreka. □

Iz te trditve sledi, da je $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ komutativna *algebra* (to je množica, opremljena z dvema notranjima $(+, *)$ in eno zunanjo (množenje s skalarjem) operacijo, ki ustrezajo določenim zahtevam, omenjenih pri Matematiki 2). Če $L^1(\mathbb{R})$ opremimo z normo $\|\bullet\|_1$, dobimo *normiran prostor*, ker pa je ta še poln, se imenuje *Banachov prostor*.

Trditev 3.3. *Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Tej lastnosti rečemo submultiplikativnost.*

Ker je $*$ submultiplikativna, je $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ *Banachova algebra*. **Opomba**:

$$\|f * g - f_1 * g_1\|_1 = \|f * g - f * g_1 + f * g_1 - f_1 * g_1\|_1 \leq$$

$$\leq \|f * g - f * g_1\|_1 + \|f * g_1 - f_1 * g_1\|_1 \leq \|f_1\|_1 \|g - g_1\|_1 + \|g_1\|_1 \|f - f_1\|_1.$$

Od tod sledi zveznost množenja $(f, g) \mapsto f * g$. Če imamo funkcijski zaporedji f_n in g_n z limitama f in g v $L^1(\mathbb{R})$, potem po zgornji opombi velja, da ima funkcijska vrsta $f_n * g_n$ limito $f * g$ v $L^1(\mathbb{R})$.

Trditev 3.4. *Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja*

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}.$$

Dokaz. Najprej dokažimo za funkciji $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Tedaj je tudi $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Funkcija $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)e^{-\mathrm{i}x\xi}$ ima kompakten nosilec, zato lahko uporabimo Fubinijev izrek in uporabimo substitucijo $x - t = y$:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\mathrm{i}(y+t)\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}.$$

Naj bosta sedaj $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Vemo, da obstajata taki zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ v metriki d_1. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\widehat{f_n * g_n} = \sqrt{2\pi}\hat{f}_n\hat{g}_n.$$

Ko pošljemo n proti ∞ dobimo
$$\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}.$$
Desna stran sledi iz neenakosti $|\hat{h}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|h\|_1$, leva stran pa iz iste neenakosti in zveznosti množenja konvolucije. ☐

Trditev 3.5. *Če je f zvezno odvedljiva funkcija in integral*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x-t)||g(t)| \,\mathrm{d}t$$
absolutno konvergenten na vsakem končnem intervalu glede na x, potem smemo konvolucijo odvajati po x in velja
$$(f*g)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definicija 3.5. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *gladka*, če je neskončnokrat (zvezno) odvedljiva. Simbolno zapisano $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \implies \exists f^{(n)}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Opomba: če je funkcija n-krat odvedljiva, je $n-1$-krat zvezno odvedljiva. Če je neskončnokrat odvedljiva, je torej neskončnokrat zvezno odvedljiva. Množica vseh gladkih neničelnih funkcijah s kompaktnim nosilcem se označi z $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Šolski primer take funkcije je
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right); & x\in(0,1), \\ 0; & \text{sicer.}\end{cases} \tag{3.1}$$

Opomba: če je f odvedljiva in $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, potem je nosilec za f' tudi kompakten. Če je $f\in\mathcal{C}_c^\infty$, sledi $f^{(n)}\in\mathcal{C}_c^\infty$ za vse $n\in\mathbb{N}$. Če je $f\in\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$, potem je $(f*g)^{(n)} = f^{(n)}*g$ za vsako naravno število $n<k$.

Definicija 3.6. *Schwarzev razred hitro padajočih funkcij* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sestoji iz vseh $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ funkcij, za katere velja, da je predpis
$$x\mapsto f^{(m)}(x)x^n$$
omejen za vse $m,n\in\mathbb{N}_0$.

Lema 3.6. $\mathscr{S}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})$.

Dokaz. Naj bo $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Po predpostavki sta funkciji f in $x\mapsto f(x)x^2$ omejeni, zato je tudi funkcija $x\mapsto f(x)\cdot(1+x^2)$ omejena. To pomeni, da obstaja tak $M>0$, da je $|f(x)(x^2+1)|\leq M$ za vsak $x\in\mathbb{R}$ oziroma
$$|f(x)|\leq \frac{M}{1+x^2}.$$
Zato velja
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{M}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi M < \infty.$$
☐

Lema 3.7. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Naj bo $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Tedaj je tudi $f^{(m)}\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ za vsak $m\in\mathbb{N}$. Torej obstaja tak $a>0$, da je $f^{(n)}(x)=0$ za $|x|>a$. Funkcija $x\mapsto f^{(m)}(x)x^n$ je zvezna in živi na kompaktnem nosilcu, zato doseže maksimum in je omejena. Ker je $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, je tudi v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. ☐

S podobnim argumentom kot zgoraj bi lahko argumentirali, da je $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ za vsak $1 \leq p < \infty$. Množice

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

so vsi vektorski prostori. $L^2(\mathbb{R})$ je poseben, saj lahko na njem definiramo še skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x,$$

glede na katerega je $L^2(\mathbb{R})$ poln. To pomeni, da je $(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Hilbertov prostor*. Izkaže se, da je napolnitev $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ glede na metriko

$$d_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

izomorfna $L^2(\mathbb{R})$.

Zgled 3.4. $f(x) = e^{-cx^2}$ za $c > 0$ je v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ oziroma natančneje $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. To dokažemo z indukcijo.

Na spodnjem diagramu so prikazani odnosi med obravnavanimi množicami funkcij. Znak $\subsetneq_p$ označuje gosto podmnožico v p-metriki (to sicer ni standardna oznaka). Če zraven ni številke, potem je gosta v vseh metrikah, če ni vijuge, potem ni gosta. Diagram smo brez oznak gostosti narisali pri pouku, gostosti sem dodal sam, tako da je lahko kaj pomanjkljivo ali narobe.

$$\begin{tikzcd}
 & & L^1(\mathbb{R}) & & \\
\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \arrow[r, phantom, "\subsetneq_2"] & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \arrow[ur, phantom, "\subsetneq_1"] \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq_2"] & & \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \arrow[ul, phantom, "\supsetneq_1"] \arrow[dl, phantom, "\supsetneq_2"] \arrow[r, phantom, "\supsetneq"] \arrow[d, phantom, "\subsetneq_\infty"] & \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \\
 & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & L^2(\mathbb{R}) & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) &
\end{tikzcd}$$

Trditev 3.8. *Naj bo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Tedaj so naslednje funkcije tudi v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$:*

i) $f_t : x \mapsto f(x - t)$;

ii) $f_{[a]} : x \mapsto f(ax)$ *za* $a \neq 0$;

iii) $f^{(n)}$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$;

iv) $f \cdot p$, *kjer je* p *polinom;*

v) $f * g$, *če je tudi* $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Dokaz.

i) Funkcija $x \mapsto f^{(m)}(x-t)x^n$ je ekvivalentna funkciji $u \mapsto f^{(m)}(u)(u+t)^n$. To funkcijo lahko zapišemo kot

$$f^{(m)}(u) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i t^{n-i}.$$

Ker je vsak člen v vsoti omejen, je tudi vsota omejena.

ii) Funkcijo $x \mapsto f^{(m)}(ax)x^n$ lahko ekvivalentno zapišemo kot $u \mapsto f^{(n)}(u)u^n/a^n$, kar je omejena funkcija, pomnožena s konstanto. To pa je tudi omejeno.

iii) Funkcija $x \mapsto f^{(m+k)}(x)x^n$ je po predpostavki omejena.

iv) Velja

$$(f(x)p(x))^{(m)}x^n = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f^{(i)}(x)p^{(m-i)}(x)x^n.$$

Vsak posamezen člen je po točki i) omejen, zato je celotna vsota omejena.

v) Ta del je bistveno težje dokazati, zato dokaza ne obravnavamo.

□

Trditev 3.9. *Če je $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, potem je tudi $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, potem pa še, da je $\xi \mapsto \xi^n \hat{f}^{(m)}(\xi)$ omejena za vse $m, n \in \mathbb{N}$.

Najprej poglejmo, ali $\hat{f}^{(n)}$ obstajajo. Označimo s $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identično funkcijo $\chi(x) = x$. Ker je $\chi^n f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, je tudi $\chi^n f \in L^1(\mathbb{R})$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$. Po točki v) trditve 3.1 obstaja $\hat{f}^{(n)}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej je funkcija gladka

Dokažimo še omejenost. Po trditvi 3.1 5), velja

$$\hat{f}'(x) = -\mathrm{i}\widehat{\chi f}(\xi) = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Da lahko to trditev uporabimo, mora veljati $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, kar očitno res velja. Če uporabimo zgornjo formulo za funkcijo $x \mapsto xf(x)$, dobimo

$$\hat{f}''(\xi) = (-\mathrm{i})^2 \widehat{\chi^2 f}(\xi) = \frac{(-\mathrm{i})^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Ker je $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, je tudi $\chi^n f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ za vse $n \in \mathbb{N}$, zato lahko to formulo uporabimo za poljubni odvod. Z indukcijo dobimo

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = (-\mathrm{i})^n \widehat{\chi^n f}(\xi) = \frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Če m-krat uporabimo formulo 4) iz trditve 3.1, dobimo

$$\widehat{f^{(m)}}(\xi) = \mathrm{i}^m \xi^m \hat{f}(\xi),$$

ob predpostavki, da je $f^{(n)}$ zvezna in $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. V našem primeru to velja, zato to ugotovitev uporabimo skupaj s 5):

$$\xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi) = \xi^m (-\mathrm{i})^n \widehat{\chi^n f}(\xi) = (-\mathrm{i})^n (-\mathrm{i})^n \widehat{(\chi^n f)^{(m)}}(\chi).$$

Ker je $x \mapsto (x^n f(x))^{(m)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, je po trditvi 3.1 1) funkcija $\widehat{(\chi^n f)^{(m)}}$ omejena. Torej je tudi $\xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi)$ omejena, zato je $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. □

3.4 Inverzna Fourierova transformacija

Definicija 3.7. Če je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, lahko definiramo *inverzno Fourierovo transformacijo* kot

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi.$$

Trditev 3.10. *Naj bo $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $g_0(x) = e^{-x^2/2}$. Velja $\widehat{g_0} = g_0$ in $\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a} e^{-x^2/2a^2}$.*

Opomba: tako definirani funkciji g_0 rečemo tudi *Gaussovo jedro*.

Dokaz. Če že vemo, da je $\widehat{g_0} = g_0$, potem je po 3.1 3)

$$\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a}\widehat{g_0}(\xi/a) = \frac{1}{a}g_0(\xi/a) = \frac{1}{a}e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}.$$

Poskusimo Fourierovo transformacijo funkcije g_0 zapisati na malo drugačen način z dopolnitvijo do kvadrata:

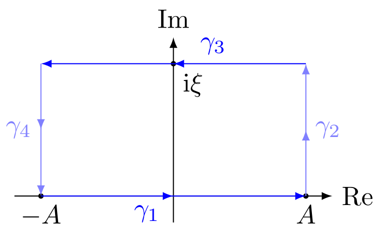
$$\widehat{g_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\mathrm{i}x\xi)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2\mathrm{i}x\xi-\xi^2)}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ker tega integrala ne znamo neposredno izračunati si pomagamo s kompleksno analizo. Integral lahko zapišemo tudi kot

$$I = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integriramo funkcijo $f(z) = e^{-z^2/2}$ po poti $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (kot kaže slika 3.1). Ker je f cela, torej



Slika 3.1: Pot, po kateri se integrira pri dokazu trditve 3.10.

nima singularnosti, je

$$\oint_\gamma e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ta integral je sestavljen iz štirih delov:

$$\int_{\gamma_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{-A}^{A} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\gamma_3} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)}\,\mathrm{d}x, \quad x, \xi \in \mathbb{R}$$

in še dveh pokončnih odsekov

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \int_{\gamma_4} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(-A+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Velja

$$\lim_{A\to\infty}\left|\int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}t\right| = \lim_{A\to\infty} e^{-\frac{1}{2}A^2}\left|\int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}t/A)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq$$

$$\leq \lim_{A\to\infty} e^{-\frac{1}{2}A^2}\left|\int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right| = \lim_{A\to\infty} e^{-\frac{1}{2}(A^2+1)}|\xi| = 0.$$

Podobno dokažemo, da gre tudi integral po krivulji γ_4 proti 0, ko gre A proti ∞. Pokazali smo, da je

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

To pa rešimo s pomočjo substitucije $u = x^2/2$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\infty} u^{-1/2}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\Gamma(-1/2) = \sqrt{2\pi}.$$

Sledi, da je

$$\widehat{g_0}(\xi) = e^{-\xi^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = g_0(\xi).$$

□

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s takimi funkcijami $g \in L^1(\mathbb{R})$, za katere velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Vpeljimo novo oznako $g_{(\delta)}(x) = \frac{1}{\delta}g(x/\delta)$. Ker je $g \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{(\delta)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta}g\Big(\frac{x}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

torej je tudi $g_{(\delta)} \in L^1(\mathbb{R})$ in velja še

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{(\delta)}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Če ima g kompakten nosilec $[-A, A]$, potem ima $g_{(\delta)}$ kompakten nosilec $[-A\delta, A\delta]$. Primer take funkcije je $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Trditev 3.11. *Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka funkcija, da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$.*
i) Tedaj za vsako omejeno in zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ velja, da limita $\lim_{\delta\searrow 0} f * g_{(\delta)} = f$ konvergira enakomerno na vsakem končnem intervalu.
ii) Za $f \in L^1(\mathbb{R})$ konvergira $f * g_{(\delta)}$ proti f v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$, ko gre $\delta \searrow 0$.

Opomba: ker iz enakomerne konvergence sledi konvergenca po točkah, iz točke i) sledi, da $f * g_{(\delta)}$ konvergira proti f po točkah.

Dokaz. i) Ker je f omejena, označimo $M := \sup f(x)$. Vzemimo zaprt interval $[a, b]$. Ker je f zvezna na $[a, b]$, je tam enakomerno zvezna. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\eta > 0$, da je $|f(x-t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}$ za vsak $t < \eta$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|(f * g_{(\delta)})(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_{(\delta)}(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_{(\delta)}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_{(\delta)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)||g_{(\delta)}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)||g_{(\delta)}(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{|t|>\eta} |f(x-t) - f(x)||g_{(\delta)}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}\int_{|t|<\eta} |g_{(\delta)}(t)|\,\mathrm{d}t + 2M\int_{|t|>\eta} |g_{(\delta)}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta}\int_{|t|>\eta} \left|g\Big(\frac{x}{\delta}\Big)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta}\int_{|u|>\eta/\delta} |g(u)|\,\mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ko pošljemo $\delta \searrow 0$ in ker velja $g \in L^1(\mathbb{R})$, je lahko $\int_{|u|>\eta/\delta} |g(u)|\,\mathrm{d}u$ poljubno majhen, recimo manjši od $\frac{\delta\varepsilon}{4M}$.

ii) Tega dela ne bomo dokazovali, ker je dokaz pretežek.

□

Posledica 3.12. *Za vsako zvezno funkcijo f z nosilcem v $[a,b]$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja zaporedje gladkih funkcij f_n z nosilci v intervalih $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, ki enakomerno konvergirajo proti f.*

Dokaz. (Ideja) Uporabimo prejšnjo trditev 3.11 za funkcijo $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Primer take funkcije bi bila primerno raztegnjena in premaknjena funkcija (3.1). Z množenjem s konstanto lahko dosežemo, da je njen integral po celi realni osi enak 1. □

Izrek 3.13 (*Weierstrassov aproksimacijski izrek*)**.** *Za vsako zvezno funkcijo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, da za vsak $x \in [a,b]$ velja $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.*

Opomba: ta izrek pravi, da so polinomi gosti v $(\mathcal{C}[a,b], d_\infty)$.

Dokaz. (Ideja) Naj bo $f \in \mathcal{C}[a,b]$. To funkcijo zvezno razširimo na $\mathbb{R}$, tako da je $f(x) = 0$ za $x \in (-\infty, a-1] \cup [b+1, \infty)$. Na $(a-1, a)$ in $[b, b+1]$ uporabimo linearno funkcijo. Uporabimo trditev 3.11 in za $g(x)$ vzamemo Gaussovo jedro $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/2)$. Imamo

$$\left| f(x) - \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{a-1}^{b+1} f(t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2\delta^2}} \,\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon.$$

Eksponentno funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto, ki konvergira enakomerno. Vzamemo dovolj pozno Taylorjevo vsoto ki nam po integraciji da iskani polinom. □

Trditev 3.14. *Za $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ velja*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}x\xi} \,\mathrm{d}\xi.$$

Opombe:

i) Zgornjo formulo lahko zapišemo tudi kot $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$.

ii) S predpisom

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}x\xi} \,\mathrm{d}\xi$$

je definirana inverzna Fourierova transformacija.

iii) Inverzna formula je smiselna, saj je $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, zato je tudi $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, kar sledi iz 3.9.

Dokaz. Iz $\hat{f}$ pod integralom želimo dobiti samo f. To bomo storili tako, da bomo dodali funkcijo $g(x) = e^{-a^2x^2/2}$ za $a > 0$, na katero bo prešla transformacija:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\mathrm{i}x\xi} e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2} \,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mathrm{i}\xi(x-t)} e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2} \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi.$$

Ker so funkcije pod integralom absolutno integrabilne lahko uporabimo najbolj splošno obliko Fubinijevega izreka, ki pravi, če je $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$ potem velja

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Sledi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\xi(x-t)}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g_{[a]}}(t-x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g_{[a]}}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Uporabimo trditev 3.1 3) na funkciji g ter naredimo substitucijo $y = x - t$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g_{[a]}}(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}_{(a)}(t-x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_{(a)}(y)\,\mathrm{d}y = (f * g_{(a)})(x).$$

Na koncu v obeh izrazih pošljemo a proti 0. Ker je $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, lahko limito prestavimo pod integral. Na koncu pa uporabimo še trditev 3.11:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi &= (f * g_{(a)})(x)\\
\lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi &= \lim_{a\to 0}(f * g_{(a)})(x)\\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\lim_{a\to 0}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi &= \lim_{a\to 0}(f * g_{(a)})(x)\\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi &= f(x)
\end{aligned}$$

□

Opomba: če je v prejšnjem izreku $f \in L^1(\mathbb{R})$, kar je šibkejša predpostavka, in je tudi $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, potem velja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

skoraj povsod, to pomeni povsod razen na množici z Lebesgueovo mero 0. Primer takih množic so števne množice. Če se funkciji ujemata skoraj povsod, sta integrala enaka, zato ju v praksi pogosto enačimo.

Lema 3.15.

$$\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

je bijekcija.

Dokaz. Če je $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, potem je v tem razredu tudi njena transformiranka $\mathcal{F}(f)$ in tudi $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$ ter vse nadaljnje transformiranke $\mathcal{F}^n(f)$. Ker velja $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$, potem je $\mathcal{F}^4(f)(x) = f(x)$. Spomnimo se trditve, če je $a \circ b = \mathrm{Id}$, potem je a surjektivna in b injektivna. Ker je $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = \mathrm{Id}$ in $\mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}$, potem je $\mathcal{F}$ injektivna in surjektivna, ergo bijektivna. □

Trditev 3.16. *Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$ zvezna in odvedljiva v točki $x \in \mathbb{R}$, potem velja*

$$f(x) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Če pa je poleg zgornjih predpostavk še $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, potem pa je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Z drugimi besedami, točke, kjer inverzna transformacija ne vrne prvotne funkcije so kvečjemu točke preloma ali nezveznosti.

Zgled 3.5. Poiščimo Fourierovo transformiranko funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Vpeljimo novo funkcijo $g(x) = e^{-|x|}$. Vemo že, da je $\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$. Torej je $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\hat{g}(\xi)$. Ker je $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, velja $\hat{\hat{g}}(\xi) = g(-\xi)$. Zato dobimo $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|-x|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$.

Lema 3.17 (*Riemann-Lebesgueova lema*)**.** *Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$, potem je*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Dokaz. Lemo bomo dokazali v štirih korakih.

1. Naj bo $f = \chi_{[a,b]}$. Velja

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = \lim_{\xi\to\infty} \frac{|e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}|}{\sqrt{2\pi}|\xi|} \le \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}|\xi|} = 0.$$

2. Naj bo $f = \lambda_1\chi_{[a_1,b_1]} + \lambda_2\chi_{[a_2,b_2]} + ... + \lambda_n\chi_{[a_n,b_n]}$. Velja

$$\lim_{|\xi|\to 0} |\hat{f}(\xi)| = \lim_{|\xi\to 0|} |\lambda_1\hat{\chi}_1 + ... + \lambda_n\hat{\chi}_n| = 0.$$

3. Naj bo $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Tedaj je f ničelna izven nekega intervala $[a, b]$, na katerem je enakomerno zvezna. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, če je $|x - x'| < \delta$. Naredimo delitev $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, tako da je $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ za vse $k = 1, ..., n$. Naj bodo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in naj bo

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\chi_{[x_{k-1},x_k]}.$$

Velja

$$\|f - s\|_1 = \int_a^b |f(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(t_k)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Imamo $\hat{f}(\xi) = \widehat{f-s}(\xi) + \hat{s}(x)$. Ocenimo absolutno vrednost:

$$|\hat{f}(\xi)| \le |\widehat{f-s}(\xi)| + |\hat{s}(\xi)| \le \frac{\|f - s\|_1}{\sqrt{2\pi}} + |\hat{s}(\xi)|.$$

V prejšnji točki smo pokazali, da $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{s}(x)| = 0$. Ker pa je $\|f - s\|_1 < \varepsilon$ za poljuben $\varepsilon > 0$, velja $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

4. Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Po definiciji prostora L^1 obstaja zaporedje funkcij iz $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, ki konvergirajo proti f. Vzemimo dovolj pozen element s tega zaporedja, da bo veljalo $\|f - s\|_1 < \varepsilon$ za poljuben $\varepsilon > 0$. Spet velja

$$|\hat{f}(\xi)| \le |\widehat{f-s}(\xi)| + |\hat{s}(\xi)| \le \frac{\|f - s\|_1}{\sqrt{2\pi}} + |\hat{s}(\xi)|.$$

Po prejšnji točki je $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{s}(\xi)| = 0$, saj je $s \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Ker pa je $\|f - s\|_1 < \varepsilon$ za poljuben $\varepsilon > 0$, velja $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

□

3.5 Plancherelov izrek

Riemann-Lebesgueova lema nam pravi, da Fourierova transformacija slika iz $L^1(\mathbb{R})$ v $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Vemo pa že, da je $\mathcal{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}(\mathbb{R})$ bijekcija. Velja

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.$$

Iz tega sledi, da je $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ omejen operator med Banachovimi prostori.

Ponovimo nekaj lastnosti funkcijskih prostorov. $L^1(\mathbb{R})$ je napolnitev prostora $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ glede na metriko d_1 in $L^2(\mathbb{R})$ je napolnitev prostora $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ glede na metriko d_2. Metrika d_2 pride iz norme $\|\bullet\|_2$, ki pride iz skalarnega produkta

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Velja

$$d_2(f,g)=\|f-g\|_2=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x}.$$

Če vektorski prostor $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ opremimo s skalarnim produktom, dobimo strukturo $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\langle\bullet,\bullet\rangle)$, ki ji rečemo *vektorski prostor s skalarnim produktom*.

Naj bosta $f,g\in L^2(\mathbb{R})$. Tedaj obstajata taki zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ glede na normo d_2. Za poljuben n je $\langle f_n,g_n\rangle$ dobro definiran, saj imata obe funkciji kompakten nosilec. Sedaj definirajmo $\langle f,g\rangle := \lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle$. Če bi obstajali še dve zaporedji $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ in $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, za kateri bi veljalo $\lim_{n\to\infty} f_n' = f$ in $\lim_{n\to\infty} g_n' = g$ glede na normo d_2, potem bi bilo po definiciji $\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n',g_n'\rangle$. To pomeni, da je skalarni produkt $\langle\bullet,\bullet\rangle$ dobro definiran. Prostor $(L^2(\mathbb{R}),\langle\bullet,\bullet\rangle)$ je poln v metriki, inducirani s skalarnim produktom, zato se imenuje *Hilbertov prostor*.

Kot smo že omenili, je $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ gost v $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ glede na metriko d_∞. Naj bo $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ s kompaktnim nosilcem v $[a,b]$ in $g\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, tako da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Limita $\lim_{\delta\searrow 0}(f*g_{(\delta)}) = f$ konvergira na zaprtih omejenih intervalih, torej tudi na $[a,b]$. Ker sta $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, je tudi $f*g_{(\delta)}\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, in ker je $g_{(\delta)}$ gladka, velja $(f*g_{(\delta)})^{(k)} = f*g_{(\delta)}^{(k)}$, torej je $f*g_{(\delta)}\in\mathcal{C}_c^\infty$. Iz tega sledi, da je prostor $\mathcal{C}_c^\infty$ gost v $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ glede na d_1. Brez dokaza navedimo trditev, da iz $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glede na d_∞ sledi $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ glede na d_2. Sledi, da je $\mathcal{C}_C^\infty(R)$ gost v $L^2(\mathbb{R})$ glede na d_2. Ker je $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathscr{S}(\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R})$ in je $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ gost v $L^2(\mathbb{R})$, potem je tudi $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ gost v $L^2(\mathbb{R})$.

Trditev 3.18. *Za $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ velja $\langle f,g\rangle = \langle\hat{f},\hat{g}\rangle$.*

Opomba: če je $f=g$, potem $\langle f,f\rangle = \langle\hat{f},\hat{f}\rangle$ oziroma $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Ker velja $d_2(f,g) = d_2(\hat{f},\hat{g})$, pravimo, da je Fourierova transformacija na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ linearna bijektivna izometrija.

Dokaz. Uporabimo formulo za inverzno Fourierovo transformacijo:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}(\xi)}e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \langle\hat{f},\hat{g}\rangle.$$

□

Definicija 3.8. Naj bosta U in V končno-dimenzionalna vektorska prostora s skalarnim produktom in naj bo $A: U\to V$ linearna preslikava. *Adjungirana preslikava* preslikave A je preslikava A^*, če velja $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$ za vsak $x\in U$ in vsak $y\in V$. Preslikava A je *unitarna*, če velja $AA^* = \mathrm{Id}_U$ in $A^*A = \mathrm{Id}_V$.

Preslikava A je unitarna natanko tedaj, ko je A linearna surjektivna izometrija. Ker so vse izometrije injektivne, so vse unitarne preslikave bijektivne. Unitarno matriko prepoznamo po tem, da ima ortogonalne lastne podprostore in absolutne vrednosti lastnih vrednosti enake ena.

Unitarne preslikave pa lahko definiramo tudi na Hilbertovih prostorih. Naj bo $A : H \to K$ linearna preslikava med Hilbertovima prostoroma. Tedaj obstaja natanko ena preslikava $A^* : K \to H$, da je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ za vsak $x \in K$ in za vsak $y \in H$. A je unitarna, če $A^*A = I_H$ in $AA^* = I_K$.

Izrek 3.19 (*Plancherelov izrek*)**.** *$\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ lahko razširimo do unitarnega operatorja na $L^2(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Ker je $f \in L^2(\mathbb{R})$, obstaja tako Cauchyjevo zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Ker je $d_2(f_n, f_m) = d_2(\hat{f}_n, \hat{f}_m)$, je tudi $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Definirajmo $\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$. Če bi bilo $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neko drugo Cauchyjevo zaporedje v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ki bi konvergiralo proti f, potem bi zaporedje $\|f_n - g_n\|_2$ konvergiralo proti 0. Ker pa je $\|f_n - g_n\|_2 = \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2$, bo tudi zaporedje $\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2$ konvergiralo proti 0 in bo zaporedje $\hat{g}_n$ konvergiralo proti $\hat{f}$. To pomeni, da je definicija $\hat{f}$ dobra (neodvisna od izbire zaporedja). Skalarni produkt na $L^2(\mathbb{R})$ definiramo preko limite. Če sta $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, potem najdemo zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ ali $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ki konvergirata proti f in g, ter definiramo skalarni produkt $\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle$. To je dobro definiran skalarni produkt v $L^2(\mathbb{R})$, ki porodi polno metriko d_2, torej je $L^2(\mathbb{R})$ Hilbertov prostor. Sedaj lahko razširimo Fourierovo transformacijo iz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ na $L^2(\mathbb{R})$. Če želimo pokazati, da je unitaren operator, moramo dokazati linearnost, izometričnost in surjektivnost.
Linearnost: sledi iz linearnosti $\mathcal{F}$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ in definicije $\mathcal{F}(f)$.
Izometričnost: če sta $f, g \in L^2$, potem obstajata zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ki konvergirata k f in h g. Velja

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \hat{f}_n, \hat{g}_n\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

Surjektivnost: v $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ vemo, da $\mathcal{F}^4(f) = f$. Spet vzamemo zaporedje $(f_n)_{n\in\ltimes}$ iz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ in gledamo, kam limitirajo Fourierove transformacije. Imamo

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(f_n) = \mathcal{F}(f), \quad \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^2(f_n) = \mathcal{F}^2(f), \quad \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^3(f_n) = \mathcal{F}^3(f), \quad \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^4(f_n) = \mathcal{F}^4(f).$$

Ampak $\mathcal{F}^4(f_n) = f_n$, kar je identiteta. Ko razširimo identiteto, dobimo spet identiteto, zato mora veljati $\mathcal{F}^4(f) = f$. Ker je $\mathcal{F}(\mathcal{F}^3(f)) = f$, mora biti $\mathcal{F}$ surjektivna. □

Poglavje 4

Linearne diferencialne enačbe 2. reda

4.1 Reševanje z nastavkom potenčne vrste

Dana je diferencialna enačba

$$y'' + py' + qy = 0,$$

kjer sta p in q podani funkciji. Če sta p in q konstanti, lahko rešimo *karakteristični polinom*. V splošnem pa ne znamo rešiti take diferencialne enačbe. Če poznamo ali uganemo eno rešitev, lahko drugo dobimo s pomočjo *determinante Wrońskega*, ki je rešitev diferencialne enačbe 1. reda. Mi bomo enačbo oblike $y'' + py' + qy = 0$ reševali v kompleksnem, pri čemer bosta p in q holomorfni na neki punktirani okolici dane točke, v tej točki pa singularnost ne bo prevelika.

Naj bosta p in q holomorfni funkciji na neki okolici točke 0. Velja

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad \text{in} \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

za $p_k, q_k \in \mathbb{C}$. Recimo, da ima diferencialna enačba rešitev, ki je holomorfna na neki okolici točke 0. Zapišemo jo lahko kot vrsto

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

za $c_k \in \mathbb{C}$. To vrsto lahko členoma odvajamo in preindeksiramo, da dobimo še njen prvi in drugi odvod:

$$y'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} z^k, \quad y''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k.$$

Ta nastavek nesemo v diferencialno enačbo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = 0.$$

Ker dane potenčne vrste konvergirajo absolutno na okolici izhodišča, jih lahko seštejemo v poljubnem vrstnem redu:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1) c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} ((j+1) c_{j+1} p_{k-j} + c_j q_{k-j}) \right) z^k.$$

Ker potenčna vrsta konvergira na nekem odprtem krogu okoli izhodišča, so vsi koeficienti enaki 0:

$$c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k} ((j+1) c_{j+1} p_{k-j} + c_j q_{k-j}), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Izrek 4.1. *Če sta p in q holomorfni funkciji na $D(\alpha, R)$, potem za poljubni kompleksni števili c_0 in c_1 obstaja natanko ena rešitev diferencialne enačbe $y'' + py' + qy = 0$, ki zadošča pogojema $y(\alpha) = c_0$ in $y'(\alpha) = c_1$. Ta rešitev je holomorfna na $D(\alpha, R)$.*

Dokaz. (Ideja) Definiramo $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$, kjer so c_k podani kot prej. Dokažemo, da y reši diferencialno enačbo in zadošča $y(\alpha) = c_0$ in $y'(\alpha) = c_1$. Zelo težko pa je dokazati, da ta potenčna vrsta konvergira na $D(\alpha, R)$. □

Zgled 4.1. Naj bo dana enačba $y'' + y = 0$, pri čemer sta $p = 0$ in $q = 1$. Ker sta p in q holomorfna na $D(0, R)$, je y holomorfna na $D(0, R)$. Ker to velja za poljuben $R > 0$, je y holomorfna na $\mathbb{C}$. Ko vstavimo razvoje y in odvodov v enačbo, dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 0$$

oziroma

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)}.$$

Z indukcijo lahko pokažemo, da velja

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!} \quad \text{in} \quad c_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}c_1}{(2n-1)!}.$$

Skupna rešitev je

$$y(z) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = c_0 \cos z + c_1 \sin z.$$

Definicija 4.1. Točka α je *regularna točka* diferencialne enačbe $y'' + py' + qy = 0$, če sta p in q holomorfni na odprti okolici točke α. Če α ni regularna, potem je *singularna*. Točka α je *pravilna singularna točka* za zgornjo diferencialno enačbo, če sta p in q holomorfni na punktirani okolici točke α, v točki α pa ima p kvečjemu pol prve, q pa kvečjemu pol druge stopnje.

Če je α pravilna singularnost za diferencialno enačbo, potem sta $z \mapsto (z-\alpha)p(z)$ in $z \mapsto (z-\alpha)^2 q(z)$ holomorfni na okolici točke α.

Zgled 4.2.

i) Diferencialna enačba

$$y'' - \frac{2z}{1-z^2}y' + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}y = 0$$

se imenuje *Legendrova diferencialna enačba*. Velja $p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}$ in $q(z) = \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}$. Točki 1 in -1 sta pravilni singularnosti, saj sta pola reda 1 za p in q, ostale točke pa so regularne.

ii) Diferencialna enačba

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

oziroma

$$z^2y'' + zy + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

se imenuje *Besselova diferencialna enačba*. Velja $p(z) = \frac{1}{z}$ in $q(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}$. Točka 0 je pravilna singularnost, saj je pol reda 1 za p in pol reda 2 za q. Ostale točke so regularne.

4.2 Reševanje v okolici pravilne singularnosti

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\alpha = 0$, torej sta $z \mapsto zp(z)$ in $z \mapsto z^2 q(z)$ holomorfni na okolici izhodišča:

$$zp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad \text{in} \quad z^2 q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k.$$

Koeficiente smo definirali nekoliko drugače kot v prejšnjem podpoglavju. Recimo, da vrsti konvergirata na $D(0, R)$. Iščemo rešitev oblike

$$y = z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

kjer je $\mu \in \mathbb{C}$. Pomnožimo diferencialno enačbo z z^2

$$z^2 y'' + z(zp)y' + (z^2 q)y = 0.$$

Odvodi funkcije y se nekoliko spremenijo:

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\mu}, \quad y'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu) c_k z^{k+\mu-1}, \quad y''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1) c_k z^{k+\mu-2}.$$

Ko vstavimo vrste v diferencialno enačbo, dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1) c_k z^{k+\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} (\mu+j) c_j z^{\mu+j} + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{\mu+j} = 0.$$

Ker mora biti koeficient pred vsako potenco z enak nič, dobimo pogoj

$$0 = (\mu+k)(\mu+k-1) c_k + \sum_{j=0}^{k} ((\mu+j) c_j p_{k-j} + c_j q_{k-j}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

To lahko preoblikujemo v

$$[(\mu+k)(\mu+k-1+p_0) + q_0] c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} [(\mu+j) p_{k-j} + q_{k-j}] c_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

S pomočjo te formule lahko koeficiente rekurzivno izračunamo. Za $k = 0$ (pri potenci z^{μ}) obravnavamo poseben primer, saj moramo določiti še μ:

$$0 = \mu(\mu-1) c_0 + p_0 \mu c_0 + q_0 c_0$$

oziroma

$$c_0(\mu(\mu-1) + p_0 \mu + q_0) = 0.$$

Če izpostavimo z na neko potenco in krajšamo, ugotovimo, da $c_0 \neq 0$. Tako dobimo *določilno zvezo za μ*:

$$\mu(\mu-1) + p_0 \mu + q_0 = 0.$$

Tako dobljenemu μ rečemo *karakteristični eksponent*. Ker p_0 in q_0 poznamo, lahko izračunamo obe rešitvi kvadratne enačbe μ_1 in μ_2. Dva eksponenta nam predstavljata dve različni rešitvi diferencialne enačbe. Želimo, da $(\mu+k)(\mu+k-1+p_0) + q_0 \neq 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ ter za μ_1 in μ_2. Karakteristična eksponenta označimo tako, da je $\operatorname{Re} \mu_1 \geq \operatorname{Re} \mu_2$. Oglejmo si kvadratno funkcijo $f(\mu) = \mu(\mu-1+p_0) + q_0$. Pišemo lahko $f(\mu) = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)$. Velja

$$f(\mu+k) = (\mu+k)(\mu+k-1+p_0) + q_0 = (\mu+k-\mu_1)(\mu+k-\mu_2).$$

V

$$(\mu+k-\mu_1)(\mu+k-\mu_2) c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} [(\mu+j) p_{k-j} + q_{k-j}] c_j$$

vstavimo $\mu = \mu_1$ in dobimo

$$k(k + \mu_1 - \mu_2)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_1 + j)p_{k-j} + q_{k-j}]c_j.$$

Izraz $k(k + \mu_1 - \mu_2)$ ne more biti nič, saj je $k > 0$ in Re $\mu_1 \geq$ Re μ_2. To pomeni, da lahko c_k vedno izračunamo po formuli

$$c_k = -\frac{1}{k(k + \mu_1 - \mu_2)}\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_1 + j)p_{k-j} + q_{k-j}]c_j.$$

Tako dobimo prvo rešitev diferencialne enačbe:

$$y_1(z) = z^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Če vstavimo $\mu = \mu_2$, dobimo

$$k(k - \mu_1 + \mu_2)d_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_2 + j)p_{k-j} + q_{k-j}]d_j.$$

Če $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$, potem lahko delimo s $(k - \mu_1 + \mu_2)$ in dobimo koeficiente za drugo rešitev:

$$d_k = -\frac{1}{k(k - \mu_1 + \mu_2)}\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_2 - j)p_{k-j} + q_{k-j}]d_j$$

in rešitev

$$y_2(z) = z^{\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

Če se zgodi $\mu_1 - \mu_2 = m \in \mathbb{N}$, lahko postavimo $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$ in poljubno izberemo c_m. Tako lahko določimo nadaljnje koeficiente. Obstaja izrek, ki nam zagotavlja, da bo vsaka taka rešitev holomorfna na primerni okolici. Lahko pa se zgodi, da je tako dobljena rešitev linearno odvisna od y_1. V tem primeru uporabimo drugačen nastavek.

Izrek 4.2. *Naj bo α pravilna singularnost diferencialne enačbe $y'' + py' + qy = 0$. Naj bosta $z \mapsto (z-\alpha)p(z)$ in $z \mapsto (z-\alpha)^2 q(z)$ holomorfni funkciji na $D(\alpha, R)$. Naj bosta μ_1 in μ_2 karakteristična eksponenta te enačbe. Potem obstaja vsaj ena funkcija oblike*

$$y_1(z) = (z - \alpha)^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - \alpha)^k,$$

kjer je potenčna vrsta konvergentna na $D(\alpha, R)$. Če je Re $\mu_1 \geq$ Re μ_2 *in $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$, je*

$$y_2(z) = (z - \alpha)^{\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - \alpha)^k$$

druga rešitev, ki je linearno neodvisna od y_1, vsota pa je konvergentna na $D(\alpha, R)$.

Zgled 4.3. Rešimo diferencialno enačbo $4z^2y'' + 2zy' + zy = 0$ v okolici točke $\alpha = 0$, ki jo lahko prepišemo v obliko

$$y'' + \frac{1}{2z}y' + \frac{1}{4z}y = 0.$$

Imamo $p(z) = \frac{1}{2z}$ in $q(z) = \frac{1}{4z}$. Opazimo, da je $\alpha = 0$ pravilna singularna točka za diferencialno enačbo, saj sta funkciji $p(z)$ in $q(z)$ holomorfni na punktirani okolici od $\alpha = 0$ in imata v $\alpha = 0$ pola prve stopnje. Velja $zp(z) = \frac{1}{2}$ in $z^2q(z) = \frac{z}{4}$. Sledi $p_0 = \frac{1}{2}$ in $q_0 = 0$. Določitvena zveza je

$$\mu(\mu - 1/2) = 0$$

z rešitvama $\mu_1 = \frac{1}{2}$ in $\mu_2 = 0$. Za prvo rešitev uporabimo nastavek

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)c_k z^{k-\frac{1}{2}}, \quad y_1''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)(k-1/2)c_k z^{k-\frac{3}{2}}.$$

Ko vstavimo nastavek v enačbo, dobimo

$$4\sum_{k=0}^{\infty}(k+1/2)(k-1/2)c_k z^{k+\frac{1}{2}} + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1/2)c_k z^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\frac{3}{2}} = 0.$$

Koeficiente pred vsemi potencami enačimo z 0 in dobimo

$$((2k)^2 + 2k)c_k + c_{k-1} = 0$$

z rekurzivno formulo

$$c_k = \frac{-c_{k-1}}{2k(2k+1)}$$

in splošno formulo

$$c_k = \frac{(-1)^k c_0}{(2k+1)!}.$$

Rešitev je

$$y_1(z) = z^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{(2n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{(2n+1)!} z^{\frac{2n+1}{2}} = c_0 \sin\sqrt{z}.$$

Pri $\mu_2 = 0$ imamo nekoliko lažje delo. Ko vstavimo nastavek, dobimo

$$4\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)d_k z^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} k d_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k+1}.$$

Imamo

$$(4(k-1)k + 2k)d_k + d_{k-1} = 0,$$

ki nam da rekurzivno formulo

$$d_k = \frac{(-1)^k d_{k-1}}{2k(2k-1)}$$

in splošno formulo

$$d_k = \frac{(-1)^k d_0}{(2k)!}.$$

Druga rešitev je

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d_0}{(2n)!} z^n = d_0 \cos\sqrt{z}.$$

Obe rešitvi sta neodvisni, zato je skupna splošna rešitev dane diferencialne enačbe enaka

$$y = c_0 \sin\sqrt{z} + d_0 \cos\sqrt{z}.$$

Izrek 4.3. *Naj bo α pravilna singularnost za diferencialno enačbo $y'' + py' + qy = 0$. Naj bosta μ_1 in μ_2 karakteristična eksponenta in $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$. Naj bo $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$ in naj enačba nima dveh linearno neodvisnih rešitev oblike*

$$y_1(z) = (z-\alpha)^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \quad y_2(z) = (z-\alpha)^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-\alpha)^k.$$

Tedaj drugo rešitev iščemo v obliki

$$y_2 = y_1 \ln(z-\alpha) + (z-\alpha)^{\mu_2} f(z),$$

kjer je f holomorfna funkcija na okolici točke α in velja $f(\alpha) \neq 0$.

Opomba: Funkcijo f lahko razvijemo v potenčno vrsto, saj je holomorfna na okolici točke α. Tako lahko drugo rešitev iščemo s pomočjo nastavka

$$y_2 = y_1 \ln(z-\alpha) + (z-\alpha)^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} e_k (z-\alpha)^k.$$

Dokaz. (Skica) Naj bo $\alpha = 0$. Uporabimo determinanto Wrońskega. Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi diferencialne enačbe $y'' + py' + qy = 0$. Definirajmo

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

čemur rečemo determinanta Wrońskega. Ker y_1 in y_2 rešita diferencialno enačbo, je

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Izraz $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ delimo z y_1^2 in dobimo

$$\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'.$$

Sledi

$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}\,\mathrm{d}x := y_1 v.$$

Ker je

$$v' = \frac{W}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(z)\,\mathrm{d}z}.$$

Sedaj vstavimo $y_1 = z^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ in $p(z) = \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1 z + \ldots$. Upoštevamo $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$, pametno integriramo, uporabimo Vietove formule in čez čas pridemo do konca dokaza. □

4.3 Besselova diferencialna enačba

Besselova diferencialna enačba je oblike

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0,$$

kjer je $\nu > 0$. Lahko jo prepišemo v obliko

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0.$$

Točka 0 je pravilna singularnost, ostale točke so regularne. Velja $zp(z) = 1$ in $z^2 q(z) = z^2 - \nu^2$. Imamo $p_0 = 1$ in $q_0 = -\nu^2$. Določilna zveza $\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = 0$ nam da izraz $\mu^2 - \nu^2 = 0$ z rešitvama $\mu_1 = \nu$ in $\mu_2 = -\nu$. Prvo rešitev dobimo z nastavkom. Če $2\nu \notin \mathbb{N}$, lahko tudi drugo rešitev dobimo z nastavkom. Če je 2ν liho število, druga rešitev ni linearno odvisna od prve, če pa je 2ν sodo število pa sta rešitvi, dobljeni s prvim nastavkom linearno odvisni, zato moramo uporabiti poseben nastavek iz izreka 4.3.

Najprej določimo prvo rešitev. Nastavek je

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu}, \quad y_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu) c_k z^{k+\nu-1}, \quad y_1''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu)(k+\nu-1) c_k z^{k+\nu-2}.$$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2) c_k z^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu+2} = 0.$$

Pridobimo rekurzivno formulo
$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}.$$
Pri koeficientu $z^{\nu+1}$ dobimo $(2\nu+1)c_1 = 0$. Ker je $\nu \geq 0$, mora biti $c_1 = 0$. Posledično velja
$$c_{2n-1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Rešitev bo torej oblike
$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{\nu+2n},$$
kjer so
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2+2\nu) \cdot \ldots \cdot (2n+2\nu)} = \frac{(-1)^n c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(n+\nu+1)}.$$
Običajno izberemo $c_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(\nu+1)$, tako da so koeficienti oblike
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(\nu+n+1)}.$$
Tako pridobljena rešitev se imenuje *Besselova funkcija* (prve vrste) reda ν:
$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} z^{2n+\nu}.$$
Če je $\nu \in \mathbb{N}$, potem z^ν obstaja povsod na $\mathbb{C}$, in zato je J_n cela funkcija za $n \in \mathbb{N}$. Če je $2\nu \notin \mathbb{N}$, potem iščemo drugo rešitev z nastavkom
$$y_2(z) = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$
ki nam da rešitev
$$J_{-\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n!(n-\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-\nu}.$$
Uporabili smo zapis $\Gamma(x+1) = x!$ za $n > -1$. Če je 2ν liho število, torej $2\nu = 2k-1$ za nek $k \in \mathbb{N}$, dobimo
$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2n(2n-2\nu)} \text{ in } c_{2n-1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Rešitev je spet
$$J_{-\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n!(n-\nu)!}.$$
Ta rešitev je neodvisna od J_ν. V bližini ničle za $n = 0$ dobimo $J_\nu(z) \approx (z/2)^\nu$ in $J_{-\nu}(z) \approx (z/2)^{-\nu}$. Prva je očitno omejena, druga pa ni, zato funkciji ne moreta biti linearno odvisni.

Trditev 4.4. *Za $\nu \notin \mathbb{N}$ je splošna rešitev Besselove diferencialne enačbe oblike*
$$c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}.$$

Zgled 4.4. Izračunajmo $J_{1/2}$ in $J_{-1/2}$:
$$J_{1/2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1/2}}{2^{2n+1/2} n!(n+1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$
Pri tem smo uporabili zvezo $2^{2n+1} n!(n+1/2)! = \sqrt{\pi}(2n+1)!$.
$$J_{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1/2}}{2^{2n-1/2} n!(n-1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n} n!(n-1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

Trditev 4.5. *Veljata naslednji zvezi:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^{-\nu} J_\nu(z)\right) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

Dokaz. Izkoristimo dejstvo, da so funkcije na skoraj celotni kompleksni ravnini holomorfne (razen na enem poltraku), zato lahko funkcijske vrste odvajamo členoma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2\nu)z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+\nu-1}z^\nu}{2^{2n+\nu-1}n!(n+\nu-1)!} = z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^{-\nu} J_\nu(z)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nz^{2n-1}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+\nu-1}z^{-\nu}}{2^{2n+\nu-1}(n-1)!(n+\nu)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} z^{2n+\nu+1}z^{-\nu}}{2^{2n+\nu+1}n!(n+\nu+1)!} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z).$$

□

Zgled 4.5. Za $\nu = 0$ velja $J_0' = J_{-1}$ in $J_0' = -J_1$, iz česar sledi $J_1 = -J_{-1}$. Ti dve funkciji sta linearno odvisni. Lahko pa izračunamo $J_{3/2}$:

$$J_{3/2} = -z^{\frac{1}{2}}\left(z^{-\frac{1}{2}}J_{1/2}\right)' = -z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin z}{z}\right)' = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\sin z - z\cos z}{z}.$$

Posledica 4.6. *Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ so funkcije $J_{n/2}$ elementarne.*

Dokaz. Indukcija po $n \in \mathbb{Z}$ z uporabo formule 4.5. □

Trditev 4.7. *Veljata naslednji zvezi:*

$$J_\nu'(z) + \frac{\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z)$$

in

$$J_\nu'(z) - \frac{\nu}{z}J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z).$$

S seštevanjem ali odštevanjem dobimo lahko tudi

$$\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

in

$$2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z).$$

Dokaz.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = \nu z^{\nu-1}J_\nu(z) + z^\nu J_\nu'(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

Pri tem smo uporabili trditev 4.5. Na koncu delimo z z^ν in dobimo $J_\nu'(z) + \frac{\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z)$. Drugo formulo dobimo z odvajanjem $z^{-\nu}J_\nu(z)$. □

Zgled 4.6. S pomočjo teh formul lahko določimo $J_{3/2}(z)$ še na drugačen način:

$$J_{3/2}(z) = \frac{1}{z}J_{1/2}(z) - J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\sin z - z\cos z}{z}.$$

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je 2ν sodo število. Naj bo $\nu = m \in \mathbb{N}$. Ena od rešitev je

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+m}}{2^{2n+m} n!(n+m)!}.$$

Druga rešitev bi bila oblike

$$J_{-m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-m}}{2^{2n-m} n!(n-m)!},$$

vendar zaradi primera $n - m = -1$ postavimo vse člene do potence z^m na nič. Ko preindeksiramo, dobimo

$$J_{-m}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-m}}{2^{2n-m} n!(n-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} z^{2k+m}}{2^{2k+m} k!(k+m)!} = (-1)^m J_m(z).$$

Ugotovili smo, da je za $m \in \mathbb{N}$ druga rešitev Besselove enačbe večkratnik prve rešitve: $J_m = (-1)^m J_{-m}$. Po izreku 4.3 iščemo rešitev z nastavkom

$$y_2(z) = J_m(z)\ln(z) + z^{-m} f(z),$$

kjer je f holomorfna funkcija v okolici točke 0 in velja $f(0) \neq 0$. K tem rešitvam se bomo še vrnili.

Posledica 4.8. *Za vsak $m \in \mathbb{N}$ so edine rešitve Besselove enačbe*

$$z^2 y'' + zy + (z^2 - m^2)y = 0,$$

ki so omejene na neki okolici izhodišča, oblike $cJ_m(z)$, kjer je $c \in \mathbb{C}$ konstanta.

Dokaz. Splošna rešitev je $cJ_m(z) + d(J_m(z)\ln(z) + z^{-m}f(z))$. Ker $f(0) \neq 0$, in ker je člen z^{-m} neomejen okoli izhodišča, mora za omejeno rešitev veljati $d = 0$. □

Na sliki 4.1 so predstavljene različne Besselove funkcije.

Definicija 4.2. Funkcija $e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})}$ se imenuje *generirajoča (ali rodovna) funkcija* Besselovih funkcij celega indeksa.

Trditev 4.9.

$$e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) t^m.$$

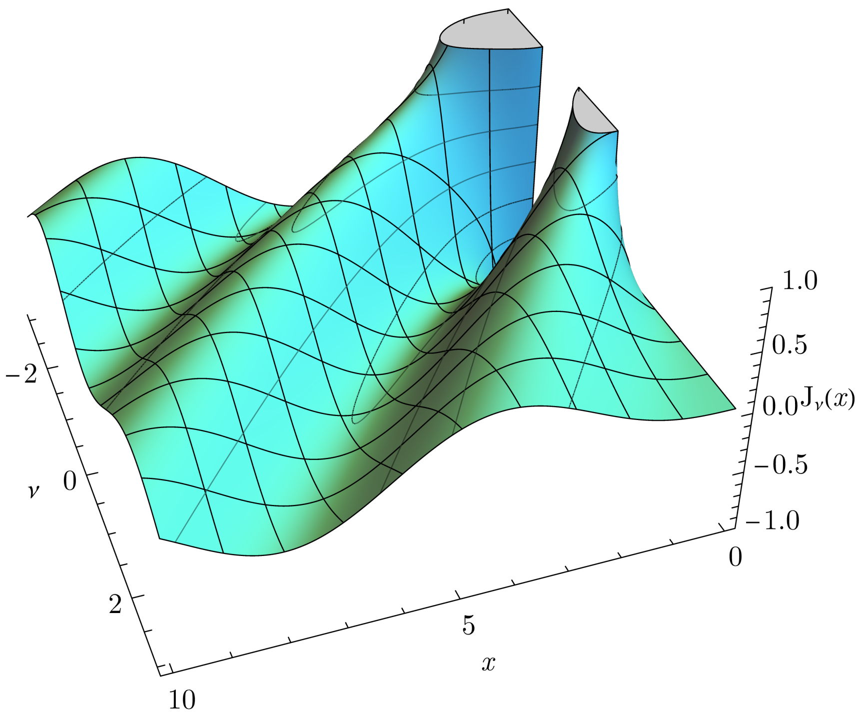
Dokaz. Za $t \neq 0$ velja

$$e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = e^{\frac{zt}{2}} e^{-\frac{zt^{-1}}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j t^j}{2^j j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k t^{-k}}{2^k k!} = \sum_{j,k} \frac{(-1)^k z^{j+k} t^{j-k}}{2^{j+k} j! k!}.$$

Poglejmo si koeficient pred t^m:

$$\sum_{j-k=m} (-1)^k \frac{z^{j+k}}{j!k!2^{j+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+m}}{2^{2k+m} k!(k+m)!} = J_m(z).$$

□



Slika 4.1: Prikaz Besselovih funkcij v odvisnosti od reda ν. Za $\nu \geq 0$ so v bližini ničle Besselove funkcije omejene, za negativne ν pa niso. Posamezne Besselove funkcije opisujejo mrežne črte, ki tečejo v smeri osi x.

Opomba: pri fiksnem z razvoj za $e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})}$ konvergira enakomerno po kompaktnih množicah, ki ne vsebujejo $t = 0$.

Trditev 4.10. *Za $z, w \in \mathbb{C}$ ter $m \in \mathbb{N}$ velja*

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w).$$

Dokaz. Velja

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z+w) t^m = e^{\frac{z+w}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(z) t^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(w) t^k.$$

Poglejmo si koeficient pred t^m:

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w).$$

$\square$

Opomba: za $m = 0$ velja

$$J_0(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(z)J_k(w) = J_0(z)J_0(w) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(z)J_k(w).$$

Posledica 4.11.

$$J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2 = 1.$$

Dokaz. Uporabimo $m = 0$ in $w = -z$. Iz izbire c_0 sledi $J_0(0) = 1$. Ker je J_0 soda funkcija, je $J_0(z) = J_0(-z)$. V splošnem pa velja $J_k(-z) = (-1)^k J_k(z)$. Dobimo:

$$1 = J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(z)J_k(-z) = J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z^2).$$

□

Posledica 4.12. *Za $z \in \mathbb{R}$ velja $|J_0(z)| \leq 1$ in $|J_k(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.*

Izrek 4.13. *Za $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

To se imenuje Hansel-Besselova formula.

Za splošen $\nu \in \mathbb{R}$ in $x > 0$ velja

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\nu\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\sinh t - \nu t}\,\mathrm{d}t.$$

Dokaz. Vzamemo

$$e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

in vstavimo $z = x$ in $t = e^{\mathrm{i}\varphi}$. Velja

$$e^{\frac{x}{2}(e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi})} = e^{\mathrm{i}x\sin\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)e^{\mathrm{i}k\varphi}.$$

Ločimo na realni in imaginarni del:

$$\cos(x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos(k\varphi), \quad \sin(x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\sin(k\varphi).$$

Prvo enakost množimo s $\cos(m\varphi)$ drugo pa s $\sin(m\varphi)$ in ju seštejemo:

$$\cos(x\sin\varphi)\cos(m\varphi) + \sin(x\sin\varphi)\sin(m\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)(\cos(k\varphi)\cos(m\varphi) + \sin(k\varphi)\sin(m\varphi)),$$

$$\cos(m\varphi - x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos((m-k)\varphi).$$

Delimo s π in integriramo po φ od 0 do π:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos((m-k)\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^\pi J_k(x)\cos((m-k)\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\int_0^\pi \cos((m-k)\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\pi\delta_{km} = J_m(x).$$

Integral in vrsto lahko zamenjamo, saj vrsta konvergira enakomerno na $[0,\pi]$ (glej zadnjo opombo pri konvergenci generirajoče vrste). Integral funkcije $\cos((m-k)\varphi)$ od 0 do π bo vedno nič, razen ko je $m = k$. Takrat je integral enak π (skupaj $\pi\delta_{km}$). □

Vrnimo se k funkcijam J_{-m} za $m \in \mathbb{N}_0$. Te rešijo Besselovo diferencialno enačbo, vendar so odvisne od J_m. Velja namreč $J_m(z) = (-1)^m J_{-m}(z)$. Možnost bi bila, da se iskanja druge rešitve lotimo z nastavkom 4.3. Lahko pa se lotimo tudi na drugačen način.

Definicija 4.3. *Neumannova (ali Webrova) funkcija* ali Besselova funkcija druge vrste je za $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ definirana kot

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Y_ν je linearna kombinacija funkcij J_ν in $J_{-\nu}$, torej Y_ν reši Besselovo diferencialno enačbo reda ν. Ker sta J_ν in $J_{-\nu}$ linearno neodvisna, sta tudi J_ν in Y_ν linearno neodvisna, zato se pogosto splošno rešitev išče kot linearno kombinacijo slednjih dveh.

Definicija 4.4. Za $\nu = m \in \mathbb{N}$ definiramo

$$Y_m(z) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(z).$$

Imamo

$$Y_m(z) = \lim_{\nu\to m}\frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} = \lim_{\nu\to m}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\cos\pi\nu - \pi J_\nu(z)\sin\pi\nu - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)}{\pi\cos\pi\nu} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^m\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right)\Bigg|_{\nu=m}.$$

Ta definicija nam ugaja, saj je linearna.

Trditev 4.14. *Funkcija Y_m reši Besselovo enačbo*

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0.$$

Dokaz. Vemo, da funkciji J_ν in $J_{-\nu}$ rešita diferencialno enačbo $z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)y = 0$ za $\nu \notin \mathbb{N}$. Naredimo parcialni odvod te diferencialne enačbe po ν. Izkaže se, da lahko vrstni red odvajanja po ν in po x zamenjamo:

$$z^2\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial y}{\partial\nu} = 2\nu y.$$

Vstavimo $y_1 = J_\nu$ in $y_2 = J_{-\nu}$:

$$z^2\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} = 2\nu J_\nu,$$

$$z^2\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu} = 2\nu J_{-\nu}.$$

Prvo enačbo delimo s π, drugo pa z $(-1)^m\pi$, seštejemo in pošljemo ν proti m:

$$z^2Y_m'' + zY_m' + (z^2-\nu^2)Y_m = \frac{2m}{\pi}\left(J_m + (-1)^m J_{-m}\right) = 0.$$

$\square$

Opomba: izkaže se, da je determinanta Wrońskega za J_m in Y_m enaka $W(x) = \frac{2}{\pi x}$. Ker to ni nikjer enako nič, sta J_m in Y_m linearno neodvisni.

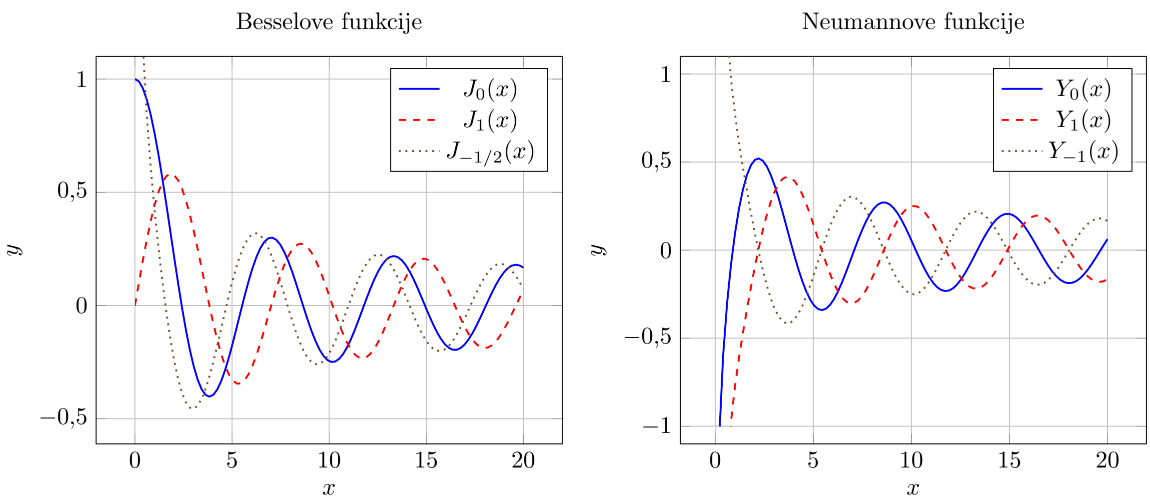
Trditev 4.15. *Veljata rekurzivni zvezi*

$$2Y_\nu'(z) = Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z)$$

in

$$\frac{2\nu}{z}Y_\nu(z) = Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z).$$

Za Neumannove funkcije veljajo vse linearne relacije, ki smo jih pokazali za Besselove, saj so ene le linearne kombinacije drugih. Prikaz enih in drugih je na sliki 4.2.



(a) prikaz nekaterih Besselovih funkcij.

(b) prikaz nekaterih Neumannovih funkcij.

Slika 4.2: primerjava med Besselovimi in Neumannovimi funkcijami (ali primerjava med Besselovimi funkcijami prve in druge stopnje). Pri Besselovih funkcijah je razvidno, da je obnašanje funkcije v bližini ničle podobno x^ν. Graf $j_1(x)$ ni narisan, saj je enak $-j_1(x)$. S prikaza je razvidno, da so Besselove in Neumannove funkcije istega reda neodvisne (za celoštevilske rede), saj so Besselove omejene, Neumannove pa ne.

4.4 Legendrovi polinomi

Legendrova diferencialna enačba reda ν je

$$(z^2-1)y'' + 2zy' - \nu(\nu+1)y = 0.$$

Točke $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ so regularne, -1 in 1 pa sta pravilni singularnosti. Okoli izhodišča rešujemo naslednjo diferencialno enačbo:

$$y'' + \frac{2z}{z^2-1}y' - \frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1}y = 0.$$

Imamo $p(z) = \frac{2z}{z^2-1}$ in $q(z) = -\frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1}$. Ti dve funkciji sta holomorfni na $D(0,1)$, zato po izreku 4.1 sledi, da obstaja natanko ena rešitev oblike

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

ki zadošča pogojema $y(0) = a$ in $y'(0) = b$ ter je holomorfna na $D(0,1)$. Ta nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo:

$$(z^2-1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)z^{k-2} + 2z\sum_{k=0}^{\infty} kc_k z^{k-1} - \nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 0.$$

Sledi:

$$c_k k(k-1) - c_{k+2}(k+2)(k+1) + 2kc_k - \nu(\nu+1)c_k = 0$$

in

$$c_{k+2} = \frac{(k-\nu)(k+\nu-1)}{(k+2)(k+1)}c_k.$$

Poglejmo si prva dva soda člena:

$$c_2 = -\frac{\nu(\nu+1)}{2}c_0, \quad c_4 = \frac{(2-\nu)(-\nu)(\nu+1)(\nu+3)}{24}c_0.$$

Z indukcijo lahko pokažemo splošno formulo za lihe in sode koeficiente:

$$c_{2n} = \frac{(-\nu)(-\nu+2)...(-\nu+2n-2)(\nu+1)(\nu+3)...(\nu+2n-1)}{(2n)!}c_0,$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n\frac{(\nu-1)(\nu-3)...(\nu-2n+1)(\nu+2)(\nu+4)...(\nu+2n)}{(2n+1)!}c_1.$$

Če izberemo $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$, dobimo

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}z^{2n} = 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}z^2 + \frac{(2-\nu)(-\nu)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}z^4 - ...$$

Če izberemo $c_0 = 0$ in $c_1 = 1$, dobimo

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}z^{2n+1} = z - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}z^3 + ...$$

Funkciji y_1 in y_2 sta linearno neodvisni; y_1 je soda, y_2 je liha. Nas zanima primer, ko je $\nu \in \mathbb{N}$:

- če je $\nu = 2m$, potem je $c_{2n} = 0$ za vse $n > m$ in y_1 postane sod polinom stopnje $2m$;
- če je $\nu = 2m+1$, potem je $c_{2n+1} = 0$ za vse $n > m$ in y_2 postane lih polinom stopnje $2m+1$.

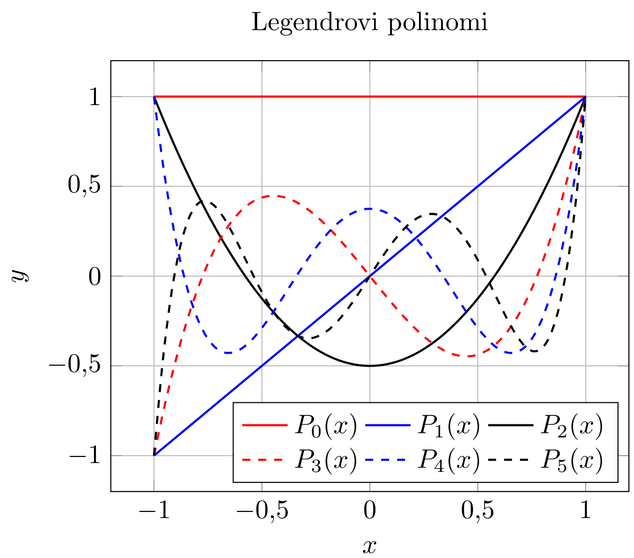
Če je ν sod, vzamemo y_1, če je ν lih, vzamemo y_2. Tako dobimo polinome $P_0, P_1, P_2, P_3, ...$ Tipično te polinome pomnožimo še s primerno konstanto $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} = \binom{2n}{n}2^{-n}$. Tako dobimo naslednje polinome.

Definicija 4.5. *Legendrov polinom* stopnje n je definiran kot

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}z^{n-2k}.$$

Trditev 4.16 (*Rodriguesova formula*).

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n.$$



Slika 4.3: Prikaz prvih šestih Legendrovih polinomov. S slike je razvidno, da je $P_n(1) = 1$ in $P_n(-1) = (-1)^n$ ter parnosti polinomov. Opaziti je tudi zanimivo dejstvo, da se ničla polinoma vedno nahaja med ničlama prejšnjega polinoma. Polinom P_n ima na intervalu $(-1, 1)$ točno n ničel.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
P_n(z) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} z^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} z^{2n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z^2)^{n-k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (z^2)^{n-k} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (z^2)^{n-k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z^2-1)^n.
\end{aligned}
$$

Za potence, manjše od z^n bo n-ti odvod enak nič, zato smo v predzadnjem koraku lahko šteli od 0 do n. □

Poglejmo si prvih nekaj polinomov:

$$
P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z^2).
$$

Na sliki 4.3 je prikazanih prvih šest.

Trditev 4.17. *$P_n(1) = 1$ in $P_n(-1) = (-1)^n$.*

Dokaz.

$$
P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z+1)^n (z-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k (z-1)^n}{\mathrm{d}z^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} (z+1)^n}{\mathrm{d}z^{n-k}}.
$$

Ko vstavimo $z = 1$, postanejo vsi odvodi $(z-1)^n$ enaki nič, razen n-tega dovoda. Dobimo

$$
P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n} n! (1+1)^n = 1.
$$

Če vstavimo $z = -1$, dobimo podobno:

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{0}(-1-1)^n n! = (-1)^n.$$

□

Opomba: ker je parnost funkcije $\mathcal{P}(P_n)$ enaka parnosti števila n ($\mathcal{P}(n)$), očitno sledi $P_n(-1) = P_n(1) \cdot \mathcal{P}(P_n) = 1 \cdot \mathcal{P}(n) = (-1)^n$.

Trditev 4.18. *Za dovolj majhne $|t|$ velja*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n.$$

Opomba: funkcija $(1-2zt+t^2)^{-1/2}$ se imenuje *generirajoča (ali rodovna) funkcija* za Legendrove polinome.

Dokaz. (Ideja) Funkcijo $(1-2zt+t^2)^{-1/2} = (1-(2zt-t^2))^{-1/2}$ razvijemo v binomsko vrsto, ki konvergira, če je $|2zt-t^2| < 1$. Zato zahtevamo dovolj majhen $|t|$.

Razvijmo torej rodovno funkcijo po t:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(2zt-t^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}(2zt-t^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(2zt)^{m-k}t^{2k}.$$

Uporabili smo posplošen binomski simbol:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{m} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m-1)}{2^m m!} =$$

$$= \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{2^m m!} = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{(2m)!}{(m!)^2 2^m} = \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}.$$

To vstavimo v zgornji razvoj:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(2zt-t^2)}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2m}(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k 2^{m-k}z^{n-k}t^{n+k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2m)!}{2^{m+k}n!k!(n-k)!}z^{n-k}t^{n+k}.$$

Poglejmo si koeficient pred členom t^n. Veljati mora $m+k=n$, kjer pa je $k \leq m$. Tako bo k lahko tekel od 0 do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$c_m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}z^{n-2k} = P_n(z).$$

□

Posledica 4.19. *Velja*

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z).$$

Dokaz. Vzamemo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n$$

in odvajamo po t:

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(z)t^{n-1}.$$

Zgornjo enačbo množimo z $z-t$, spodnjo pa z $(1-2zt+t^2)$:

$$(z-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n = (1-2zt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)nt^{n-1}.$$

Pri potenci t^n imamo

$$zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z) - 2nzP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z).$$

Po preurejanju dobimo iskano formulo:

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z).$$

□

Izrek 4.20.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Opomba: $\delta_{mn} = 1$, če je $m = n$, sicer je $\delta_{mn} = 0$. Izrek pravi, da v prostoru $L^2[-1,1]$ Legendrovi polinomi tvorijo ortogonalno množico glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

$L^2[-1,1]$ je napolnitev množice zveznih funkcij $\mathcal{C}[-1,1]$ glede na ta skalarni produkt. Velja še

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Ta skalarni produkt razširimo do skalarnega produkta na $L^2[-1,1]$, ki je zaradi polnosti v inducirani normi Hilbertov prostor.

Dokaz. Pomagali si bomo z Rodriguesovo formulo:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x.$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $m < n$ (poseben primer, ko je $m = n$, bomo obravnavali na koncu). Uporabimo integracijo po delih:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x &= \\ &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^(n-1)}{\mathrm{d}x^(n-1)}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Če izraz $(x^2-1)^n$ odvajamo manj kot n-krat, bo njegova vrednost v -1 in 1 enaka nič, zato je prvi del integracije po delih vedno enak 0. Integracijo po delih ponovimo n-krat:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m = 0.$$

V integrandu je $n+m$-ti odvod polinoma $(x^2-1)^m$, ki je stopnje $2m$. Ker smo predpostavili, da je $n>m$, je v integrandu vsebovan višji odvod polinoma, kot je njegova stopnja, zato je celoten integrand enak 0. Posledično je tudi skalaren produkt enak 0. Poglejmo si še primer, ko je $m=n$. Tedaj imamo

$$\langle P_n, P_n\rangle = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\right)^2\mathrm{d}x.$$

Ponovimo postopek integracije po delih iz prvega dela dokaza in dobimo

$$\langle P_n, P_n\rangle = \frac{1}{4^n(n!)^2}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x.$$

Ko $2n$-krat odvajamo polinom $2n$-te stopnje, dobimo vodilni koeficient (v našem primeru je to 1), pomnožen z $(2n)!$. Imamo

$$\langle P_n, P_n\rangle = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x.$$

Integral si oglejmo natančneje; označimo ga z I. Najprej izkoristimo dejstvo, da je integrand sod, nato pa uporabimo substitucijo $x=\sin u$, torej je $\mathrm{d}x=\cos u\,\mathrm{d}u$:

$$I=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 u-1)^n\cos u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\cos^{2n+1}u\,\mathrm{d}u.$$

Ta izraz pa že na daleč kriči po Eulerjevi B funkciji, katere ena izmed formulacij je

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}\,\mathrm{d}x.$$

Opazimo, da v našem integralu velja $p=\frac{1}{2}$ in $q=n+1$. Imamo

$$I=(-1)^nB\left(\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}=\frac{\sqrt{\pi}n!}{\Gamma(n+3/2)}.$$

Uporabili bomo dejstvo, da je

$$\Gamma(z+1/2)=\frac{2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)},$$

torej

$$\Gamma(n+3/2)=\Gamma((n+1)+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{1+2n}n!}.$$

Imamo

$$I=(-1)^n\sqrt{\pi}n!\frac{2^{1+2n}n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!}=(-1)^n\frac{(n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!}.$$

Skupno je skalarni produkt enak

$$\langle P_n, P_n\rangle = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n\frac{2^{1+2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}.$$

□

Sedaj želimo aproksimirati funkcijo $f\in L^2[-1,1]$ z Legendrovimi polinomi. To storimo tako, da najprej aproksimiramo f z neko zvezno funkcijo $g\in\mathcal{C}[-1,1]$. To funkcijo aproksimiramo z nekim polinomom p.

Za aproksimacijo zvezne funkcije s polinomom uporabimo Weierstrassov izrek (3.13). Velja, da je n-ti Legendrov polinom stopnje n in da so ti polinomi ortogonalni. To pomeni, da je

$$\mathrm{Lin}\{P_0, P_1, ..., P_n\} = \mathrm{Lin}\{1, x, x^2, ..., x^n\}.$$

Vsak polinom lahko torej izrazimo kot linearno kombinacijo Legendrovih polinomov. Če zaporedje polinomov $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti g na intervalu $[-1, 1]$, potem velja

$$\|g - q_n\|^2 = \int_{-1}^{1} |g(x) - q_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon^2}{2} \,\mathrm{d}x = \varepsilon^2$$

oziroma $\|g - q_n\| \leq \varepsilon$. Pri neenačaju smo uporabili definicijo enakomerne konvergence z $\varepsilon/\sqrt{2}$. Funkcija $f \in L^2[-1, 1]$ je limita zveznih funkcij glede na metriko d_2, ki so limite polinomov glede na d_2. To pomeni, da se lahko vsaka funkcija iz $L^2[-1, 1]$ lahko zapiše kot limita zaporedja Legendrovih polinomov. Iz tega sledi, da so Legendrovi polinomi gosti v $L^2[-1, 1]$ glede na metriko d_2. Lahko si pa predstavljamo, da so Legendrovi polinomi ortogonalna baza za $L^2[-1, 1]$. Velja namreč

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n,$$

pri čemer ta vrsta konvergira glede na d_2. Kako dobimo a_n? Poglejmo si naslednje:

$$\langle f, P_n\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m, P_n \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \langle P_m, P_n\rangle = a_m \|P_n\|^2 = \frac{2a_n}{2n+1}.$$

Lahko torej zapišemo

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n\rangle P_n.$$

Zakaj so Legendrovi polinomi še uporabni? Pomagajo nam pri aproksimaciji kakih eliptičnih integralov. Če želimo integrirati $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ nam pomaga rodovna funkcija:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos\theta + r_0^2}} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

4.5 Pridružene Legendrove funkcije

Definicija 4.6. *Pridružene Legendrove funkcije* definiramo kot

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} P_n(z)$$

za $m = 0, 1, ..., n$.

Indeks m ne označuje potence ali odvoda.

Trditev 4.21. *Funkcija P_n^m reši naslednjo diferencialno enačbo:*

$$\left((1 - z^2)y'\right)' - \frac{m^2}{1 - z^2} y = -n(n+1)y.$$

To lahko zapišemo kot $Ly = -n(n+1)y$, kar se imenuje problem lastnih vrednosti za operator L, ki je drugega reda. P_n^m so lastne funkcije za L pri $\lambda = -n(n+1)$. Pri $m = 0$ imamo $P_n^m = P_n$, pri $m > 0$ pa je

$P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0$. Temu se reče homogeni robni pogoj. Pri danem $m \in \mathbb{N}$ so $n = m, m+1, m+2, \ldots$ lastne vrednosti in P_n^m lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim. Po Sturm-Liouvilleovi teoriji so $(P_n^m)_{n \geq m}$ paroma pravokotne.

Izrek 4.22. *Pri vsakem $m \in \mathbb{N}_0$ je $(P_n^m)_{n\geq m}$ ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L_2[-1,1]$. Velja*

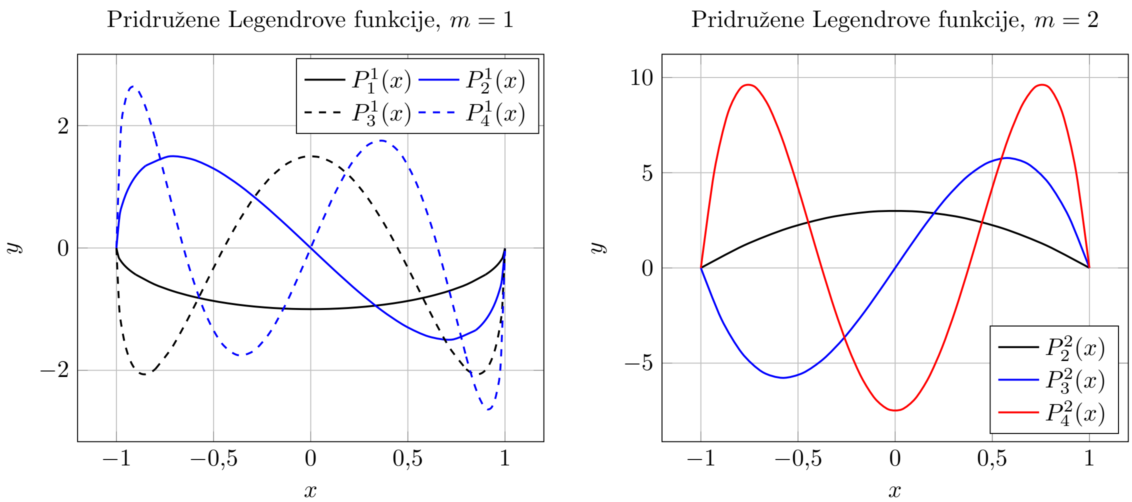
$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_{n'}^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}.$$

Prvih nekaj pridruženih Legendrovih funkcij je:

$$P_0^0(x) = 1, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2).$$

Prikazani so na sliki 4.4.



(a) Prikaz prvih nekaj pridruženih Legendrovih polinomom za $m = 1$.

(b) Prikaz prvih nekaj pridruženih Legendrovih polinomom za $m = 2$.

Slika 4.4: Prikazanih je nekaj prvih pridruženih Legendrovih funkcij, ki niso Legendrovi polinomi (torej $m > 0$). Razvidno je, da je $P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0$. Izkaže se, da so P_n^{2m} v resnici polinomi.

Diferencialno enačbo oblike

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}y + \cot\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}y + \left(-n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) = 0$$

rešijo funkcije

$$y(\theta) = P_n^m(\cos\theta),$$

ki se, če jih pomnožimo z $e^{m\varphi}$, imenujejo sferični harmoniki.

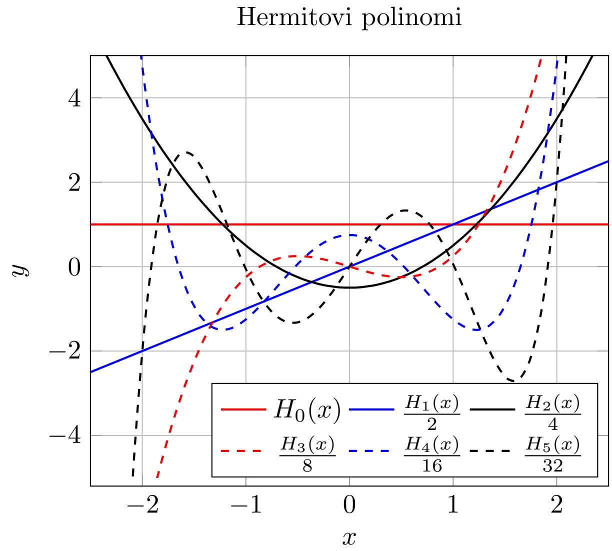
4.6 Hermiteovi polinomi

Rešujemo diferencialno enačbo

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0,$$

ki se imenuje *Hermiteova diferencialna enačba*. Imamo $p(z) = -2z$ ter $q(z) = 2\nu$, ki sta obe celi. 0 je regularna točka, zato dobimo dve neodvisni rešitvi, ki sta holomorfni na $\mathbb{C}$. Uporabimo nastavek

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$



Slika 4.5: Prikaz prvih šest Hermiteovih polinomov. Zaradi preglednejšega prikaza so normirani tako, da je vodilni koeficient enak 1.

iz česar sledi rekurzivna zveza

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = 2(k-\nu)c_k.$$

Dve neodvisni rešitvi sta soda in liha:

$$y_1(z) = 1 - \frac{2\nu}{2!}z^2 + \frac{2^2\nu(\nu-2)}{4!}z^4 - \frac{2^3\nu(\nu-2)(\nu-4)}{6!}z^6 + \ldots$$

in

$$y_2(z) = z - \frac{2(\nu-1)}{3!}z^3 + \frac{2^2(\nu-1)(\nu-3)}{5!}z^5 - \frac{2^3(\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)}{7!}z^7 + \ldots$$

Če je $\nu = n \in \mathbb{N}_0$, potem je ena od funkcij polinom stopnje n. Če je n lih, imamo lih polinom, če je n sod, imamo sod polinom. Pomnožimo jih s tako konstanto, da je vodilni koeficient enak 2^n. Ti polinomi se imenujejo *Hermiteovi polinomi*. Zapišemo jih lahko kot

$$H_n(z) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(m-2n)!}(2z)^{n-2m}.$$

Prvih nekaj je:

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z, \quad H_2(z) = 4z - 2, \quad H_3(z) = 8z^3 - 12z.$$

Na sliki 4.5 jih je prikazanih prvih nekaj.

Trditev 4.23. *Velja*

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2}.$$

Izrek 4.24. *Funkcija e^{2zt-t^2} je rodovna funkcija za Hermiteove polinome, torej velja*

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n.$$

Trditev 4.25. *Veljajo naslednje zveze:*

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - H'_{n-1}(z),$$

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z)$$

in

$$H'_n(z) = 2nH_{n-1}(z).$$

Dokaz. Te zveze dobimo z odvajanjem rodovne funkcije po z in po t ter z nekaj matematične telovadbe. □

Poglavje 5

Robni pogoji

5.1 Nihanje strune

Nihanje strune $u(x,t)$ opisuje diferencialna enačba

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

za $c > 0$. Imamo dva *začetna pogoja*:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

ter dva *robna pogoja*:

$$u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0.$$

Uporabili bomo *Fourierovo metodo separacije spremenljivk*. To pomeni, da zapišemo iskano funkcijo kot produkt dveh neodvisnih funkcij:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Ko to vstavimo v valovno enačbo, dobimo

$$\ddot{T}(t)X(x) = c^2 X''(x)T(t).$$

Delimo z u in imamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Leva stran je odvisna samo od x, desna pa samo od t, zato morata biti obe strani konstantni in enaki $-\lambda$. Ta faktor λ dobimo iz robnih pogojev. Najprej se lotimo levega dela:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Robna pogoja sta $X(0) = 0$ in $X(a) = 0$. Ločimo tri primere:

- $\lambda = 0$: $X''(x) = 0$, torej je $X(x) = cx + d$. Robni pogoji dajo $c = 0$ in $d = 0$, kar pa je samo trivialna rešitev, ki nas ne zanima.
- $\lambda < 0$: rešimo karakteristični polinom in dobimo rešitev $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Iz robnih pogojev sledi $A + B = 0$ in $Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0$. Iz prvega pogoja dobimo $A = -B$, iz drugega pa $2A\sinh(\sqrt{-\lambda}a) = 0$. Ker $a \neq 0$, mora biti $A = 0$ in $B = 0$ ter smo spet dobili trivialno rešitev.
- $\lambda > 0$: v tem primeru je rešitev $X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Iz robnih pogojev dobimo $B = 0$ ter bodisi $A = 0$ ali $\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$. Prvi primer nam spet da trivialno rešitev, drugi pa ne. Če velja $\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$, mora biti $\sqrt{\lambda}a = \pi k$ za nek $k \in \mathbb{N}_0$ (negativni k bi bili nesmiselni, saj imamo na levi pozitivno število). Dobili smo

  $$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right).$$

  Konstanto smo nastavili na 1, saj jo lahko še poljubno prilagajamo z izbiro funkcije T_k.

Sedaj rešimo enačbo za T_k:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2.$$

Rešitev je znana:

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{a}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}ct\right).$$

Dobimo eno možno rešitev

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\left[A_k \cos\left(\frac{k\pi}{a}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}ct\right)\right].$$

Ker je diferencialna enačba linearna, lahko različne rešitve seštevamo skupaj:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\left[A_k \cos\left(\frac{k\pi}{a}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}ct\right)\right].$$

Formalno gledano, ta funkcija zadošča diferencialni enačbi in robnim pogojem. Vseeno pa nas zanima nekaj stvari.

1. Ali dobljena vrsta sploh konvergira?
2. Ali je vsota dobljene vrste sploh odvedljiva po x in/ali po t?
3. Za katere A_k in B_k sta izpolnjena še začetna pogoja $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$.

Če lahko najdemo take A_k in B_k, da ustrezajo dovolj lepemu začetnemu pogoju, potem je odgovor na prvi dve vprašanji da. Če lahko u dvakrat odvajamo po x in t, če vrsta konvergira in če so izpolnjene še določene druge konvergence, potem u formalno reši našo parcialno diferencialno enačbo. Poiščimo še koeficiente A_k in B_k. Začetna pogoja sta

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right), \quad u_t(x,0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi c}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right).$$

Funkciji f in g razvijemo v *Fourierovi vrsti* na $[0,a]$. To naredimo tako, da jih najprej liho razširimo na interval $[-a,a]$ s predpisom $f(-x) = -f(x)$. Ker je razširitev liha, bo Fourierova vrsta vsebovala samo sinuse. Dobimo

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,dx \text{ in } B_k = \frac{2}{k\pi c}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,dx.$$

Opomba: označimo z $\mathcal{F}(x)$ vsoto Fourierove vrste funkcije $f(x)$

i) Če je f kosoma zvezno odvedljiva, potem je $f(x) = \mathcal{F}(x)$, če je f zvezna v x in

$$\mathcal{F}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

če f ni zvezna v x. Zgornji izraz je povprečje leve in desne limite.

ii) Če je f dvakrat zvezno odvedljiva, potem vsota Fourierove vrste konvergira enakomerno proti funkciji f. Iz enakomerne konvergence sledi konvergenca glede na d_2 v $L^2[c,d]$.

iii) Če imata f in g zvezne četrte odvode, potem je rešitev razreda $\mathcal{C}^2[0,a]$.

Neskončna struna

V tem primeru imamo spet enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

z začetnima pogojema $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$, vendar brez robnih pogojev. Lotimo se je lahko s Fourierovo transformacijo ali pa s pomočjo posebne substitucije. Naj bo $\zeta = x - ct$ in $\eta = x + ct$. Zapišimo diferencialno enačbo funkcije $u(\zeta, \eta)$. Velja

$$u_x = u_\zeta \zeta_x + u_\eta \eta_x = u_\zeta + u_\eta$$

in

$$u_{xx} = u_{\zeta\zeta} + u_{\zeta\eta} + u_{\eta\zeta} + u_{\eta\eta} = u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Pri tem mora u izpolnjevati določene pogoje, da lahko enačimo $u_{\zeta\eta}$ in $u_{\eta\zeta}$. S podobnim postopkom pridemo do izraza

$$u_{tt} = c^2(u_{\zeta\zeta} - 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}).$$

To vstavimo v prvotno diferencialno enačbo in dobimo

$$c^2(u_{\zeta\zeta} - 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}) = c^2(u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta})$$

oziroma

$$u_{\zeta\eta} = 0.$$

Če je odvod funkcije u_η enak 0, mora biti $u_\eta(\zeta, \eta) = F_0(\zeta)$. Ko to integriramo po η, dobimo

$$u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta)$$

oziroma

$$u(x, y) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Fizikalno gledano sta to dva vala, ki se premikata vsak v svojo smer s hitrostjo c. Sedaj moramo določiti F in G iz začetnih pogojev:

$$u(x, 0) = f(x) = F(x) + G(x),$$
$$u_t(x, 0) = g(x) = cG'(x) - cF'(x).$$

Dobimo $F' + G' = f'$ in $G' - F' = g/c$. Rešitev je $G' = \frac{1}{2}(g/c + f')$ in $F' = \frac{1}{2}(f' - g/c)$. Po integraciji dobimo

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s + C$$

in

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s - C.$$

Ko to vstavimo v rešitev diferencialne enačbe, imamo

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s)\,\mathrm{d}s + C - C$$

oziroma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

To imenujemo *D'Alembertova formula*

5.2 Toplotna enačba v eni dimenziji

Rešujemo enačbo

$$u_t = cu_{xx}$$

za $c > 0$ pri robnih pogojih $u(0, t) = u(a, t) = 0$ in začetnem pogoju $u(x, 0) = f(x)$. Spet uporabimo Fourierovo metodo separacije spremenljivk $u(x, t) = X(x)T(t)$. Dobimo

$$\dot{T}(t)X(x) = cX''(x)T(t) \quad \text{in} \quad \frac{1}{c}\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Najprej rešimo $X'' + \lambda X = 0$ pri robnih pogojih $X(0) = 0$ in $X(a) = 0$. To je identičen problem tistemu pri vpeti struni, zato vemo, da $\lambda \leq 0$ ne da netrivialne rešitve, $\lambda > 0$ pa da lastne vrednosti $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ za $k \in \mathbb{N}$ in lastne funkcije $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$. T_k reši diferencialno enačbo

$$\frac{1}{c}\frac{\dot{T}}{T} = -\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2.$$

Rešitev za T_k je
$$T_k(t) = D_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{a^2}ct\right),$$
skupaj pa
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{a^2}ct\right).$$
Začetni pogoj nam da
$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right).$$
Funkcijo f razvijemo v Fourierovo vrsto na $[0,a]$ in dobimo koeficiente
$$D_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Druga možnost robnih pogojev je recimo $X(0) = X'(a) = 0$. Splošna rešitev diferencialne enačbe za X je
$$X(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$
Prvi pogoj $X(0) = 0$ nam da $A = 0$, drugi pogoj pa $X'(a) = \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0$. Ta enačba ima netrivialne rešitve oblike $\sqrt{\lambda}a = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Lastne vrednosti so torej $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2$ za $k \in \mathbb{N}_0$, lastne funkcije pa
$$X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}x\right).$$

Kaj pa če imamo naslednji robni pogoj: $u(0,t) = A$ in $u(a,t) = B$? Tak problem prevedemo na prejšnjega. Vzamemo
$$v(x,t) = u(x,t) - A - \frac{B-A}{a}x.$$
Sedaj velja
$$v_t = u_t = cu_{xx} = cv_{xx},$$
torej tudi v zadošča enačbi prevajanja toplote. Imamo $v(0,t) = v(a,t) = 0$, kar znamo rešiti. Začetni pogoj je enak
$$v(x_0) = f(x) - A - \frac{B-A}{a}x.$$
Tako sestavljeno funkcijo v znamo izračunati, iskana funkcija pa je
$$u(x,t) = v(x,t) + A + \frac{B-A}{a}x.$$

5.3 Sturm-Liouvilleov problem

Rešujemo problem oblike
$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = -\lambda y$$
za zvezne funkcije P, Q in R na intervalu $[a,b]$. Če definiramo $Ly \coloneqq Py'' + Qy' + Ry$, potem se nam problem pretvori na problem lastnih vrednosti $Ly = -\lambda y$, kjer je λ neznan parameter (lastna vrednost). Dodatno zahtevamo še robne pogoje
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{in} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$
pri čemer $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Takim robnim pogojem rečemo *ločljivi*. Prostor $\mathcal{C}[a,b]$ opremimo s skalarnim produktom
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Zgled 5.1. Naj bo $Ly = y''$ in naj imamo robna pogoja $y(0) = 0$ in $y(a) = 0$. Lastni problem se glasi

$$Ly = -\lambda y \implies y'' + \lambda y = 0.$$

Rešitve za ta problem že poznamo: lastne vrednosti so $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{a^2}$ za $k \in \mathbb{N}$, pripadajoče lastne funkcije pa $y_k(x) = a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$.

Če želimo dobiti ortogonalne lastne funkcije, potrebujemo posebno preslikavo L. V primeru matrik so to normalne matrike (take, za katere velja $LL^* = L^*L$). Njihova podmnožica so sebi adjungirane ($L = L^*$), podmnožica teh pa so hermitske (konjugirano simetrične). Če je torej matrika A sebi adjungirana, velja

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \quad \forall y, x.$$

Vrnimo se k našemu problemu. Naj bodo $u, v, P \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $Q \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $R \in \mathcal{C}[a,b]$ ter P, Q, R realne.

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \int_a^b (Pu''Qu' + Ru)\overline{v}\,\mathrm{d}x \\
&= Pu'\overline{v}\big|_a^b - \int_a^b (P\overline{v})'u'\,\mathrm{d}x + Qu\overline{v}\big|_a^b - \int_a^b u(Q\overline{v})'\,\mathrm{d}x + \int_a^b Ru\overline{v}\,\mathrm{d}x \\
&= [Pu'\overline{v} - (P\overline{v})' + Qu\overline{v}]_a^b + \int_a^b u((P\overline{v})'' - (Q\overline{v})' + R\overline{v})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Zaradi realnosti P, Q in R dobimo:

$$\langle Lu, v\rangle = [P(u'\overline{v} - \overline{v}'u) + (Q - P')u\overline{v}]_a^b + \int_a^b u\overline{((Pv)'' - (Qv)' + Rv)}\,\mathrm{d}x.$$

Če je $[P(u'\overline{v} - \overline{v}'u) + (Q - P')u\overline{v}]_a^b = 0$, potem je

$$\langle Lu, v = \int_a^b u\overline{((Pv)'' - (Qv)' + Rv)}\,\mathrm{d}x = \langle u, (Pv)'' - (Qv)' + Rv\rangle.$$

Tako lahko (formalno) definiramo $L^*v = (Pv)'' - (Qv)' + Rv$. Zato rečemo, da je L *formalno sebi adjungiran*, če velja

$$(Pv)'' - (Qv)' + Rv = Pv'' + Qv' + Rv.$$

To razpišemo:

$$P''v + 2P'v' + Pv'' - Qv' - Q'v + Rv - Pv'' - Qv' - Rv = 2v'(P' - Q) + v(P'' - Q') = 0.$$

Veljati mora $P' = Q$ (iz česar avtomatsko sledi $P'' = Q'$). L je torej formalno sebi adjungiran, če je $P' = Q$. Dobimo:

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry = Py'' + P'y' + Ry' = (Py')' + Ry.$$

Zanima nas torej problem $Ly = (Py')' + Ry$ z ločenima robnima pogojema.

Trditev 5.1. *Če je diferencialni operator L formalno sebi adjungiran, potem velja Greenova identiteta:*

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle + [P(u'\overline{v} - u\overline{v}')]_a^b.$$

Dokaz. Ker je L formalno sebi adjungiran, je $Q = P'$, zaradi česar se integrirani del ustrezno poenostavi. □

Posledica 5.2. *Če funkciji $u, v \in \mathcal{C}^2[a,b]$ zadoščata ločenima robnima pogojema, potem je $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ za vsak formalno sebi adjungiran diferencialni operator L.*

Prostori z utežjo

Poglejmo si operator $Ly = -\lambda wy$, kjer je w dana strogo pozitivna funkcija na $[a, b]$. To funkcijo w imenujemo *utež*, L pa je diferencialni operator s predpisom $Ly = Py'' + Qy' + Ry$. Če imamo netrivialno rešitev enačbe $Ly = -\lambda wy$, potem je λ lastna vrednost, y pa lastna funkcija. Vpeljemo nov skalarni produkt:

$$\langle f, g\rangle_w := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,\mathrm{d}x.$$

To je *skalarni produkt z utežjo* w. Funkciji f in g sta ortogonalni z utežjo w, če je $\langle f, g\rangle_w = 0$. Norma je $\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle_w}$. Napolnitev prostora $\mathcal{C}[a, b]$ glede na $\| \bullet \|_w$ označimo z $L^2_w[a, b]$.

Trditev 5.3. *Lastne vrednosti formalno sebi adjungiranega operatorja L, kjer P nima ničel, so pri ločenih robnih pogojih realne, lastne funkcije, ki pripadajo lastnim vrednostim, pa so med seboj ortogonalne z utežjo w. Za vsako lastno vrednost λ sta katerikoli pripadajoči lastni funkciji linearno odvisni.*

Dokaz. Naj bo $Lu = -\lambda uw$. Želimo pokazati, da $\lambda \in \mathbb{R}$. Po trditvi 5.1 velja $\langle Lu, u\rangle = \langle u, Lu\rangle$, saj homogeni robni pogoj izniči dodatni člen. Dobimo:

$$\begin{aligned} \langle Lu, u\rangle &= \langle u, Lu\rangle \\ \langle -\lambda uw, u\rangle &= \langle u, -\lambda uv\rangle \\ -\lambda\langle u, u\rangle_w &= -\overline{\lambda}\langle u, w\rangle_w. \end{aligned}$$

Ker je $\langle u, u\rangle_w \neq 0$, je $\lambda = \overline{\lambda}$, oziroma $\lambda \in \mathbb{R}$. Naj bo $Lu = -\lambda uw$ in $Lv = -\mu vw$, pri čemer $\lambda \neq \mu$. Želimo pokazati, da sta u in v pravokotna glede na utež w. Imamo:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v\rangle &= \langle u, Lv\rangle \\ \langle -\lambda uw, v\rangle &= \langle u, -\mu vw\rangle \\ -\lambda\langle u, v\rangle_w &= -\mu\langle u, v\rangle_w \\ (\mu - \lambda)\langle u, v\rangle_w &= 0. \end{aligned}$$

Ker $\langle \neq \mu$, mora veljati $\langle u, v\rangle_w = 0$, oziroma $u \perp_w v$. Naj bosta sedaj u, v lastni funkciji za lastno vrednost λ. Želimo dokazati, da sta u in v linearno odvisni. Poglejmo si robni pogoj $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$. Ker sta u in v lastni funkciji pri istih ločenih robnih pogojih. Velja

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0.$$

Označimo

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}u(a)\\ u'(a)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{bmatrix},$$

kjer so $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Robni pogoj lahko kompaktnejše zapišemo kot $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u} = 0$ in $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ker sta vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ oba pravokotna na $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^2$, morata biti linearno odvisna. Torej obstajata taki konstanti c_1 in c_2, da velja $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} = 0$. Vpeljemo $y := c_1 u + c_2 v$. Zaradi linearnosti velja $Ly + \lambda wy = 0$. Zato y reši linearno diferencialno enačbo 2. reda z zveznimi koeficienti. Ker je $y(a) = y'(a) = 0$, zaradi enoličnosti rešitve Cauchyjeve enačbe velja $y = 0$, zato $c_1 u + c_2 v = 0$. □

Regularni Sturm-Liouvilleov problem

Naj bo L oblike $Ly = (Py')' + Ry$, kjer je P realna zvezno odvedljiva funkcija, R pa realna zvezna funkcija na $[a, b]$. Naj bosta P in w strogo pozitivni funkciji. Problem, pri katerem moramo določiti $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere ima enačba $Ly = -\lambda wy$ pri ločenih robnih pogojih

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{in} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ kako netrivialno rešitev $y \in \mathcal{C}^2[a,b]$ in določiti take y, imenujemo *regularni Sturm-Liouvilleov problem*.

Izrek 5.4 (*Sturm-Liouvilleov izrek*). *Za vsak regularen Sturm-Liouvilleov problem obstaja ortonormirana baza Hilbertovega prostora $L_w^2[a,b]$, sestavljena iz lastnih funkcij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorja L. Vse lastne vrednosti so enostavne in realne, ter zanje velja*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Za vsak $y \in \mathcal{C}^2[a,b]$, ki zadošča robnim pogojem, velja, da vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle y, u_n\rangle_w u_n$$

konvergira proti y po točkah glede na metriko $d_w(f,g) = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle_w}$.

Opomba: enostavna lastna vrednost pomeni, da ji pripada natanko ena neodvisna lastna funkcija (določena do skalarnega večkratnika natančno). Ker lastne funkcije tvorijo kompleten ortonormiran sistem v nekem vektorskem prostoru, jih mora biti števno mnogo, zato je tudi lastnih vrednosti neskončno in števno mnogo.

5.4 Stacionarna porazdelitev temperature na krogli

Rešujemo enačbo $u_t = c\Delta u$ na krogli s središčem v izhodišču in polmerom a. Temperatura ob času t na točki (r,θ,φ) je $u(r,\theta,\varphi,t)$. Zanima nas stacionarno stanje, torej $u_t = 0$, pri robnem pogoju $u(a,\theta,\varphi,t) = f(\theta,\varphi)$. Rešujemo torej

$$\Delta u = 0, \quad u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi).$$

Ena možnost za iskanje rešitve bi bila uporaba Greenove funkcije, izračun Poissonovega jedra in iz tega direkten izračun funkcije u. Tokrat bomo enačbo rešili s pomočjo Fourierove metode separacije spremenljivk. Enačba se v sferičnih koordinatah zapiše kot

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Nastavek je

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta).$$

Dobimo

$$R''\Theta\Phi + \frac{2}{r}R'\Phi\Theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\Theta'\sin\theta)'R\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi''R\Theta.$$

Delimo celotno enačbo z $R\Phi\Theta$:

$$r^2\sin^2\theta\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) + \sin\theta\frac{(\Theta'\sin\theta)'}{\Theta} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2.$$

Ker je leva stran samo funkcija spremenljivk r in θ ter desna stran samo funkcija spremenljivke φ, morata biti obe strani konstantni, recimo enaki m^2. Rešitev enačbe

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

smo tekom semestra srečali že mnogokrat:

$$\Phi(\varphi) = A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi).$$

Ker opisujemo dogajanje na krogli, mora veljati $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2k\pi)$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ (temu rečemo, da je Φ 2π-periodična). Sledi, da mora biti $m \in \mathbb{Z}$, vendar zadošča že $m \in \mathbb{N}_0$. Drugo enačbo obrnemo na sledeč način:

$$r^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{(\Theta'\sin\theta)'}{\Theta\sin\theta} = \lambda.$$

Leva stran je samo funkcija spremenljivke r, desna stran je samo funkcija spremenljivke θ, zato sta obe strani konstantni in enaki recimo λ. Levo stran preoblikujemo v

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0.$$

To je *Cauchy-Eulerjeva diferencialna enačba* 2. reda. Nastavek je $R = r^\mu$. Dobimo

$$r^2\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + 2r\mu r^{\mu-1} - \lambda r^\mu = 0,$$

$$\mu(\mu-1) + 2\mu - \lambda = 0 \implies \mu^2 + \mu - \lambda = 0.$$

Iz tega dobimo dve rešitvi μ_1 in μ_2, splošna rešitev pa je

$$R(r) = Ar^{\mu_1} + Br^{\mu_2},$$

če $\mu_1 \neq \mu_2$, oziroma

$$R(r) = r^\mu(A + B\ln r),$$

če $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Poglejmo si še diferencialno enačbo za Θ:

$$\sin\theta(\Theta'\sin\theta)' + (\lambda\sin^2\theta - m^2)\Theta = 0.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $s = \cos\theta$. Velja

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}(-\sin\theta).$$

Imamo

$$\Theta'\sin\theta = -\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\sin^2\theta = -\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}(1-\cos^2\theta) = -\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}(1-s^2).$$

Diferencialno enačbo za $\Theta(\theta)$ spremenimo v enačbo za $\Theta(s)$:

$$\sin\theta(\Theta'\sin\theta)' = \sin\theta(-\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\Theta'\sin\theta) = -\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-(1-s^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right) = (1-s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((1-s^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right).$$

Ko dodamo še preostali del, dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((1-s^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta = 0.$$

Če je $\lambda = n(n+1)$ za $n \in \mathbb{N}$, so po trditvi 4.21 rešitve pridružene Legendrove funkcije P_n^m. Vemo, da pri fiksnem m funkcije $(P_n^m)_{n=m}^\infty$ tvorijo ortogonalno bazo prostora $L^2[-1,1]$. Upoštevajmo še robni pogoj $u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)$. Predpostavimo, da je f odvisen samo od θ (imamo osno simetrični robni pogoj): $u(a,\theta,\varphi) = f(\theta)$. Pričakujemo, da bo f odvisna samo od θ, zato bo Φ konstantna. Edina možnost je torej $m = 0$. Rešitve naše diferencialne enačbe so sedaj $P_n^0 = P_n$, ki so navadni Legendrovi polinomi, ki tvorijo ortogonalno bazo prostora $L^2[-1,1]$. Ker je $\lambda = n(n+1)$, pri reševanju Cauchy-Eulerjeve enačbe dobimo karakteristično enačbo

$$\mu^2 + \mu - n(n+1) = 0 \implies (\mu - n)(\mu + n + 1) = 0.$$

Rešitvi sta $\mu_1 = n$ in $\mu_2 = -n-1$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Rešitev diferencialne enačbe je

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Ker je R omejena okoli izhodišča, je $B = 0$ in $R(r) = r^n$. Ena rešitev naše toplotne enačbe na krogli je

$$u_n(r,\theta,\varphi) = R_n(r)\Theta_n(\theta)\Phi_n(\phi).$$

Pod vsemi pogoji dobimo $u_n(r,\theta) = r^nP_n(\cos\theta)$, zato je splošna rešitev enačbe

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^\infty A_nr^nP_n(\cos\theta),$$

če vrsta konvergira in če jo lahko ustrezno-krat odvajamo po ustreznih spremenljivkah. Potrebujemo še konstante A_n. Iz robnega pogoja sledi

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta).$$

Uvedemo novo spremenljivko $s = \cos\theta$. Imamo

$$f(\arccos s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(s),$$

$$\int_{-1}^{1} f(\arccos s) P_m(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(s) P_m(s)\,\mathrm{d}s = A_m a^m \int_{-1}^{1} P_m(s)^2\,\mathrm{d}s = A_m a^m \frac{2m+1}{2}.$$

Ko vstavimo nazaj $s = \cos\theta$, dobimo

$$A_m = \frac{2}{2m+1} a^{-m} \int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

V splošnem, če je $f = f(\theta, \varphi)$, namesto $P_n(\cos\theta)$ dobimo funkcije $P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)$ in $P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi)$.

Dodatek: za radovedne

Ortogonalne funkcije s perspektive Sturm-Liouvilleovega problema

Sturm-Liouvilleov problem

V tem poglavju se bomo še malo bolj poglobili v Sturm-Liouvilleove (SL) probleme. Tukaj se bomo ukvarjali samo s formalno sebi adjungiranimi operatorji oblike

$$(Ly)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right) + R(x)y(x) = -\lambda w(x)y(x).$$

Robne pogoje lahko v najbolj splošni obliki opišemo kot

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = c_1,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = c_2.$$

Takemu sistemu rečemo *Dirichlet-Neumannov mešan robni pogoj.* Če velja $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ in nobena vrstica ni trivialna, rečemo robnim pogojem *Neumannovi*, če pa je $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, jim rečemo *Dirichletovi.* Če je $c_1 = c_2 = 0$, rečemo robnim pogojem *homogeni.* Glede na vrsto robnih pogojev ločimo tri vrste Sturm-Liouvilleovih problemov (ali sistemov):

1. *regularni Sturm-Liouvilleov problem*: če je robni pogoj homogen.
2. *singularni Sturm-Liouvilleov problem*: če velja eden od sledečih pogojev:
   - $P(a) = 0$, brez robnega pogoja pri a, mešan homogen robni pogoj pri b;
   - enako kot prejšnja točka, če zamenjamo a in b;
   - $p(a) = p(b) = 0$ in brez robnega pogoja;
   - interval (a, b) je neomejen.

   V vsake primeru mora veljati $y < \infty$, da se y smatra kot rešitev problema, v zadnji točki pa mora biti rešitev še s kvadratom integrabilna.
3. *periodični Sturm-Liouvilleov problem*: če je $P(a) = P(b)$, $P, R > 0$, P, R, w zvezne na $[a, b]$ ter $y(a) = y(b)$ in $y'(a) = y'(b)$.

O regularnih SL problemih smo nekaj že povedali, naj ponovimo nekaj lastnosti:

- vse lastne vrednosti so realne in enostavne;
- lastnih vrednosti je števno neskončno, vedno lahko najdemo najmanjšo, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;
- funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med sabo pravokotne glede na skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$. Lastne funkcije tvorijo kompleten ortonormiran sistem Hilbertovega prostora $L^2_w(a, b)$.

Veliko teh lastnosti pove Sturm-Loiuvilleov izrek, ki ga je zelo težko dokazati, še profesor Magajna v svoji knjigi dokazu nameni celotno poglavje (prvi komentar po izreku je “Za ta dokaz bomo potrebovali precej priprave.”). Za singularni Sturm-Liouvilleov problem veljajo vse zgoraj omenjene lastnosti. Pri periodičnem Sturm-Liouvilleovem problemu pa nastopi težava, saj lastne vrednosti niso nujno več enostavne.

Še vedno velja, da so lastne vrednosti realne, števne, lahko najdemo najmanjšo in $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Najmanjša lastna vrednosti ni nikoli degenerirana in lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so še vedno pravokotne. S takimi problemi se bolj podrobno ukvarja funkcionalna analiza oziroma njena veja spektralna teorija. V nadaljevanju si bomo pogledali nekaj že poznanih in nekaj novih ortogonalnih naborov funkcij kot rešitev Sturm-Liouvilleovega problema. V fiziki se pogosto pojavijo tovrstni problemi, eden najbolj znanih je stacionarna enodimenzionalna Schrödingerjeva enačba:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x).$$

To niso nujno regularni SL problemi, zato so lastne vrednosti lahko tudi neštevne.

Legendrovi polinomi

Enačba, iz katere smo izpeljali Legendrove polinome, je

$$(z^2-1)y'' + 2zy' - \nu(\nu+1)y = 0.$$

Rešitev iščemo na intervalu $(-1, 1)$. Označimo $\nu(\nu + 1) = \lambda$ in nekoliko preuredimo, da dobimo

$$((1-x^2)y')' = -\lambda y.$$

To je singularni Sturm-Liouvilleov problem, saj je $P(x) = 1 - x^2$, $R(x) = 0$ in $w(x) = 1$ ter velja $P(-1) = P(1) = 0$. Sturm-Liouvilleov izrek nam ne zagotavlja, da bodo rešitve polinomi (to moramo ugotoviti sami, tako da rešimo enačbo). Ugotovimo, da so lastne vrednosti $\lambda_n = n(n + 1)$. Ko najdemo pripadajoče lastne funkcije $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

nam Sturm-Liouvilleov izrek pove, da so te funkcije ortogonalne in tvorijo kompletno ortogonalno bazo za $L^2(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

To pomeni, da vsako funkcijo $f \in L^2(-1, 1)$ zapišemo kot vsoto Legendrovih polinomov:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

kjer je

$$a_n = \frac{2}{2n+1}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Legendrovi polinomi so na splošno zelo uporabni v matematiki in fiziki. Njihovo uporabo lahko najdemo v multipolnem razvoju in reševanju azimutalno invariantne Laplaceove enačbe na sferi. Spoznali smo tudi rodovno funkcijo za Legendrove polinome:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n.$$

Omenili smo pridružene Legendrove funkcije, ki rešijo SL problem oblike

$$((1-x^2)y')' - \frac{m^2}{1-x^2}y = -\lambda y.$$

Pri tem je $R(x) = m^2/(1 - x^2)$ in je $m \in \mathbb{N}_0$ podan. Lastne vrednosti so $\lambda = n(n + 1)$ za $n \geq m$. Lastne funkcije so pridružene Legendrove funkcije $P_n^m(x)$, ki jih lahko definiramo tudi kot

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(z).$$

Velja
$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x)P_l^m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{kl}\frac{2}{2k+1}\frac{(k+m)!}{(k-m)!}.$$
Te funkcije so pomemben del sferičnih harmonikov, ki so pomembni pri opisovanju multipolov in atomskih orbital ter reševanju Laplaceove enačbe na sferi.

Hermiteovi polinomi

Imamo *Hermiteovo diferencialno enačbo*
$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0.$$
To enačbo lahko pretvorimo v SL obliko:
$$\left(e^{-x^2}y'\right)' = -\nu e^{-x^2}y.$$
Interval, na katerem iščemo rešitve, ni omejen, zato je to singularni SL problem. Lastne vrednosti so $\nu = 0, 1, 2, ...$, pripadajoče lastne funkcije pa so *Hermiteovi polinomi*:
$$H_n(z) = n!\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^m}{m!(m-2n)!}(2z)^{n-2m}.$$
Te funkcije na prvi pogled niso s kvadratom integrabilne, vendar moramo upoštevati utež $w(x) = e^{-x^2}$. SL izrek nam pove, da so ti polinomi ortogonalni, velja
$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}\sqrt{\pi}2^n n!.$$
Poiščemo lahko tudi rodovno funkcijo:
$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n.$$
Ta rodovna funkcija se imenuje eksponentna, saj so členi oblike $t^n/n!$. Hermiteove polinome lahko definiramo tudi kot
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}.$$
Najbolj šolska uporaba Hermiteovih polinomov je kvantni harmonični oscilator.

Čebiševi polinomi

Poglejmo si *Čebiševo diferencialno enačbo*:
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$
To preoblikujemo tako, da dobimo regularno obliko SL problema:
$$(\sqrt{1-x^2}y')' = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y.$$
Enačbo rešujemo na intervalu $(-1, 1)$ in velja $P(x) = \sqrt{1-x^2}$ ter $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Ker je $P(\pm 1) = 0$ imamo singularen SL problem. Lastne vrednosti so $\lambda = 0, 1, 4, ...$, zato vzamemo $n = 0, 1, 2, ...$ Pripadajoče lastne funkcije so
$$T_n(z) \coloneqq \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n!}{(2j)!(n-2j)!}z^{n-2j}(z^2-1)^j$$

in se imenujejo *polinomi Čebiševa*. Vemo, da so Čebiševi polinomi ortogonalni, velja

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}\frac{\pi}{2}.$$

V posebnem primeru, ko je $m = n = 0$, je integral enak π. Poznamo tudi rodovno funkcijo:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

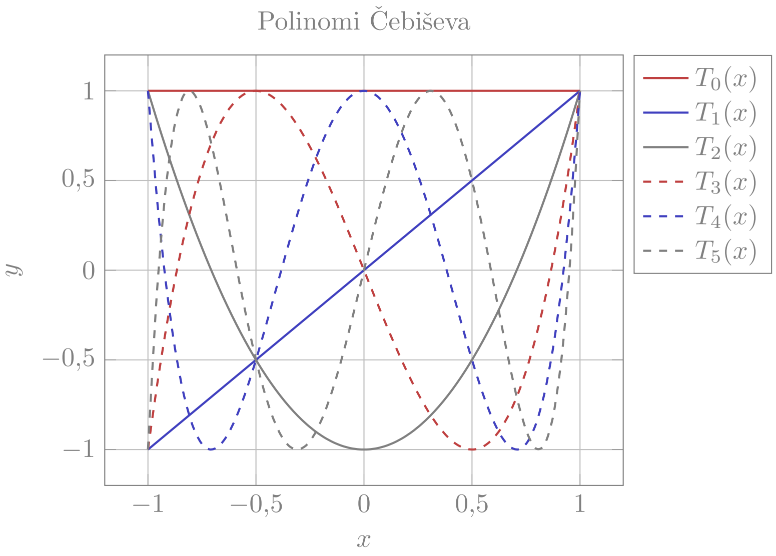
Rekurzivno jih lahko definiramo kot $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Velja zanimiva relacija

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

Prvih nekaj Čebiševih polinomov je

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^2 - 3x.$$

Prvih nekaj je prikazanih na sliki 5.1.



Slika 5.1: Prikaz prvih šest Čebiševih polinomov.

Laguerreovi polinomi

Laguerreova diferencialna enačba je

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Preoblikujemo jo v

$$(xe^{-x}y')' = -ne^{-x}y.$$

Rešitve iščemo na intervalu $(0, \infty)$, saj je $P(0) = 0$, torej imamo spet singularen SL problem. Lastne vrednosti so vsa nenegativna cela števila, lastne funkcije pa se imenujejo *Laguerreovi polinomi*:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(-1)^k}{(k!)^2(n-k)!}x^k.$$

Vemo, da so Laguerreovi polinomi med seboj pravokotni z utežjo e^{-x}:

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}.$$

Obstaja tudi rodovna funkcija:

$$\frac{e^{-xz/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)t^n.$$

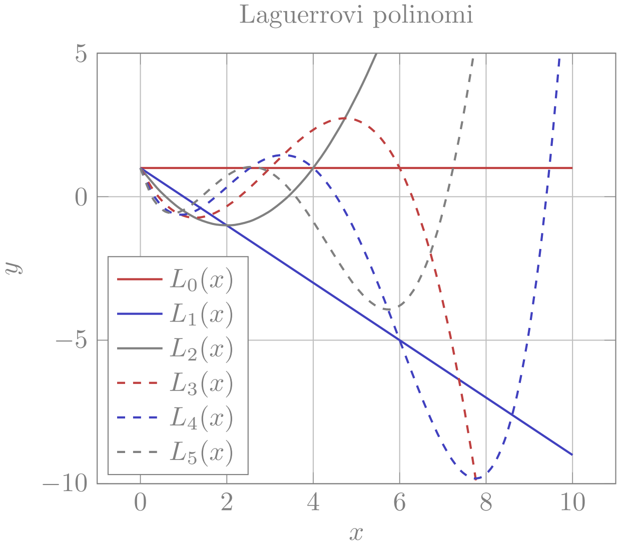
Definiramo jih tudi s pomočjo formule

$$L_n(z) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}).$$

V fiziki jih uporabimo pri izračunu verjetnosti nahajanja elektrona v odvisnosti od oddaljenosti od jedra atoma. Prvih nekaj je

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x+1, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-4x+2).$$

Prvih šest je prikazanih na sliki 5.2.



Slika 5.2: Prikaz prvih šest Laguerreovih polinomov.

Obstaja še več drugih družin ortogonalnih polinomov, med drugim Jacobijevi in Gegenbauerjevi polinomi. Večino do sedaj povedanega deluje tudi v kompleksnem.

Legendrovi polinomi P_n

- Dif. enačba: $(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$
- Utež: 1
- Def. območje: $(-1,1)$
- Rodriguesova formula: $\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$
- Skalarni produkt $\langle P_n, P_m\rangle$: $\delta_{mn}\frac{2n+1}{2}$
- Rodovna funkcija: $\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}$

Pridružene Legendrove funkcije P_n^m

- Dif. enačba: $(x^2-1)y'' + 2xy' - \frac{m^2}{x^2-1} - n(n+1)y = 0$
- Utež: 1
- Def. območje: $(-1,1)$
- Rodriguesova formula: $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^n$
- Skalarni produkt $\langle P_n^m, P_{n'}^m\rangle$: $\delta_{nn'}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

Hermiteovi polinomi H_n
- Dif. enačba:
  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$
- Utež: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Def. območje: $\mathbb{R}$
- Rodriguesova formula:
  $(-1)^n e^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$
- Skalarni produkt $\langle H_n, H_m\rangle$:
  $\delta_{mn}\sqrt{\pi}2^n n!$
- Eksponentna rodovna funkcija: e^{2xt-t^2}

Čebiševi polinomi T_n
- Dif. enačba:
  $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$
- Utež: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Def. območje: $(-1,1)$
- Rodriguesova formula:
  $\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$
- Skalarni produkt $\langle T_n, T_m\rangle$: $\delta_{mn}\dfrac{\pi}{2}$
- Rodovna funkcija: $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}$

Laguerreovi polinomi L_n
- Dif. enačba:
  $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
- Utež: e^{-x}
- Def. območje: $(0,\infty)$
- Rodriguesova formula: $\dfrac{e^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$
- Skalarni produkt $\langle L_n, L_m\rangle$: δ_{mn}
- Rodovna funkcija: $\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$

Jacobijevi polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}$
- Dif. enačba: $(z^2-1)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$
- Utež: $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
- Def. območje: $(-1,1)$
- Rodriguesova formula: $\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n\right)$
- Skalarni produkt $\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle$: $\delta_{mn}\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\dfrac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{n!(n+\alpha+\beta)!}$
- Rodovna funkcija: $2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta}$, kjer je $R = (1-2xt+t^2)^{1/2}$

Gegenbauerjevi polinomi $C_n^{(\alpha)}$
- Dif. enačba: $(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0$
- Utež: $(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
- Def. območje: $(-1,1)$
- Rodriguesova formula: $\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+n+\frac{1}{2})}(1-x^2)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}$
- Skalarni produkt $\langle C_n^{(\alpha)}, C_m^{(\alpha)}\rangle$: $\delta_{mn}\dfrac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)(\Gamma(\alpha))^2}$
- Rodovna funkcija: $\dfrac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha}$

Hipergeometrijska funkcija

Obravnavajmo enačbo oblike

$$z(z-1)y'' + [(a+b+1)z-c]y' + aby = 0.$$

Imenuje se *Gaussova* ali *hipergeometrijska enačba.* Točki 1 in 0 sta pravilni singularnosti, ostale točke so regularne. Iščemo rešitev v okolici izhodišča. Eden od karakterističnih eksponentov je enak nič, zato uporabimo nastavek $y = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$, pod pogojem, da $c_0 \neq 0$. Koeficient pred z^k je

$$k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} + k(a+b+1)c_k - (k+1)cc_{k+1} + abc_k.$$

Za nenegativna cela števila c dobimo rekurzivno zvezo

$$c_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} c_k.$$

Za c_0 izberemo 1, in dobimo

$$c_k = \frac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{k!c(c+1)...(c+k-1)} = \frac{(a)_k(b_k)}{k!(c)_k},$$

kjer smo vpeljali *Pochhamerjev simbol*:

$$(a)_k = a(a+1)...(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Rešitev, ki jo dobimo, je

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} z^k := F(a,b,c;z).$$

Definirali smo *hipergeometrijsko funkcijo* $F(a,b,c;z)$. Izkaže se, da se vsako enačbo oblike

$$(z-a)(z-b)y'' + (c+dz)y' + ey = 0$$

da prevesti na hipergeometrijsko enačbo. Poglejmo si nekaj posebnih primerov:

$$F(1,b,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

kar je geometrijska vrsta (zato se F imenuje hipergeometrijska funkcija, neke vrste posplošitev geometrijske). Velja tudi

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};z^2\right) = \frac{\arcsin z}{z}$$

in

$$F(1,1,2,-z) = \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

Kot zanimivost, Legendrovi polinomi (in tudi Čebiševi) se lahko zapišejo s pomočjo hipergeometrijske funkcije:

$$P_n(z) = F(-n,n+1,1;\frac{1}{2}(1-z)).$$

Obstaja še več zanimivih lastnosti hipergeometrijske funkcije, s katerimi se tukaj ne bomo več ukvarjali.

Stvarno kazalo