Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Matematična fizika I

Zaključna naloga

Simon Bukovšek

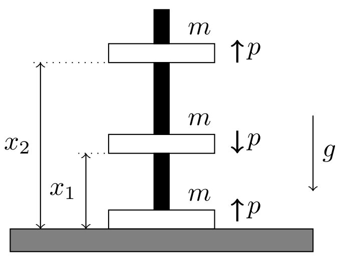
Škofja Loka, 15. junij 2023

Naloga

Razišči lastna nihanja stolpca N enakih, težkih, izmenično obrnjenih dipolnih magnetov, ki se prosto gibljejo vzdolž navpičnice.

Rešitev

Najprej razjasnimo, kako je sploh naloga mišljena. Predstavljajmo si, da imamo ploščate magnete v obliki diskov z luknjo na sredini in dolgo navpično palico s podstavkom. Magnetne diske natikamo na palico, tako da se vzdolž nje prosto gibljejo. Diski naj imajo vsak maso m in magnetni dipolni moment p obrnjen v smeri normale diska. Magnete na palico zlagamo tako, da so njihovi dipoli izmenično obrnjeni. Tako naložimo $N+1$ magnetov $-$ prvi pade do dna in se ne more premikati, zato mu bomo rekli ničti magnet, ostale pa bomo oštevilčevali od spodaj navzgor od 1 do N. Oddaljenost n-tega magneta od spodnjega bomo označili z x_n. Zaradi lepšega zapisa bomo položaj ničtega magneta označili z x_0, ampak ta vrednost bo vedno enaka nič. Postavitev zelo spominja na Hanojski stolp. Postavitev treh magnetov prikazuje slika 1.



Slika 1: Prikaz postavitve treh magnetov. Magneti so prikazani kot debeli diski, vendar si lahko predstavljamo, da so poljubno tanki.

Najprej nas zanima, kolikšna je potencialna energija med dvema magnetnima dipoloma. Vektorski potencial dipola je preprosto enak

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

kar je zelo analogno električnemu potencialu električnega dipola. Magnetno polje dipola je

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right).$$

Naj se še en dipol $\mathbf{p}_2$ nahaja na poziciji $\mathbf{r}$ glede na dipol $\mathbf{p}_1$. Potencialna energija je enaka

$$U = -\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{p}_2 = -\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{p}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{r})}{r^5}\right).$$

Pri tem smo z $\mathbf{B}_1$ označili polje, ki ga ustvarja dipol p_1. V našem primeru bosta dipola po velikosti enaka, po usmerjenosti pa vzporedna ali nasprotno vzporedna. Potencialna energija je torej

$$U = \pm\frac{\mu_0 p^2}{2\pi r^3}.$$

Predznak je odvisen od usmerjenosti dipolov. Za naš primer je sila med dipoloma po velikosti enaka

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U = \frac{3\mu_0 p^2}{2\pi r^4}.$$

Oglejmo si najbolj enostaven primer: imamo samo dva magneta. Na kakšni razdalji mirujeta? Ravnovesje sil nam da $mg = F_{\mathrm{mag}}$, torej je ravnovesna razdalja

$$h_0 = \left(\frac{3\mu_0 p^2}{2\pi g m}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ta razdalja nam da red velikosti oddaljenosti med magneti tudi v primeru več magnetov, zato jo bomo kasneje uporabili za uvedbo brezdimenzijske količine razdalje.

Najprej bomo poskusili problem rešiti popolnoma analitično in izpeljali enačbe za poljuben N, potem pa bomo naredili nekaj približkov in ugotavljali, če so upravičeni. Zložimo premike $x_1, ..., x_n$ v (matematični) vektor $\mathbf{x}$. Katerokoli količino ξ, ki jo bomo lahko pripisali vsakemu magnetu posamično (ξ_n), bomo lahko na tak način zložili v vektor $\boldsymbol{\xi}$. Naša prva naloga je, da ugotovimo ravnovesno stanje $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, ki ga bomo označili z vektorjem $\mathbf{x}^0$. Potencialna energija je sestavljena iz gravitacijskih potencialnih energij posameznih magnetov in iz magnetne potencialne energije, ki jo prispeva vsak par dipolov. To zapišemo kot

$$U = \sum_{n=1}^{N} mgx_n + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\mu_0 p^2 (-1)^{m-n+1}}{2\pi(x_m - x_n)^3}.$$

Ker velja $x_0 < x_1 < ... < x_n$, smo z zgornjim zapisom dosegli, da je imenovalec vedno pozitiven. Sedaj je primeren čas, da preklopimo na brezdimenzijske količine. Naj velja $x_n = h_0 y_n$ ter $U = mgh_0 V$. Dobimo

$$V = \sum_{n=1}^{N} y_n - \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-n}}{3(y_m - y_n)^3}.$$

V ravnovesju velja, da je gradient tega potenciala enak nič $(\nabla V)(\mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Dobimo sistem N enačb:

$$\boxed{1 = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq i}}^{N} \frac{\operatorname{sgn}(n-i)(-1)^{n-i}}{(y_n^0 - y_i^0)^4}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\},} \tag{1}$$

pri čemer še vedno velja $y_0 = 0$. Naslednji korak je vpeljava majhnih odmikov. Naj bo $y_n = y_n^0 + \eta_n$ za vse $n \in \{1, ..., N\}$, oziroma $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 + \boldsymbol{\eta}$. Potencialna energija je

$$V = \sum_{n=1}^{N} (y_n^0 + \eta_n) - \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-n}}{3(y_m^0 - y_n^0 + \eta_m - \eta_n)^3}.$$

Razvijmo ta izraz do drugega reda v $\boldsymbol{\eta}$:

$$V = \sum_{n=1}^{N} y_n^0 + \sum_{n=1}^{N} \eta_n - \sum_{\substack{m,n \\ m>n}}^{N} \frac{(-1)^{m-n}}{3(y_m^0 - y_m^0)^3} + \sum_{\substack{m,n \\ m>n}}^{N} \frac{(-1)^{m-n}(\eta_m - \eta_n)}{(y_m^0 - y_n^0)^4} - 2\sum_{\substack{m,n \\ m>n}}^{N} \frac{(-1)^{m-n}(\eta_m - \eta_n)^2}{(y_m^0 - y_n^0)^5}.$$

Prva in tretja vsota sta konstanti (recimo temu V_0) in samo premakneta skupen potencial, druga in četrta vsota sta skupaj natanko enaki nič, saj je to pogoj za ravnovesno lego, zadnja vsota pa nam da lepo kvadratno formo, ki jo lahko zapišemo kot

$$V = V_0 + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathsf{U} \boldsymbol{\eta},$$

kjer je

$$\boxed{\mathsf{U}_{ij} = -\frac{(-1)^{i-j}}{|y_i^0 - y_j^0|^5}, \quad \text{za } i \neq j \quad \text{in} \quad \mathsf{U}_{ii} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{N} \frac{(-1)^{k-i}}{|y_k^0 - y_i^0|^5}.}$$

Kinetično energijo sistema lahko zapišemo kot

$$T = \frac{1}{2} m h_0^2 |\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2.$$

Lagrangeeva funkcija se glasi

$$L = T - V = \frac{1}{2} m h_0^2 |\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 - mgh_0(V_0 + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathsf{U} \boldsymbol{\eta}).$$

Vpeljemo novo enoto za čas

$$t = t_0 \tau, \quad \text{kjer je} \quad t_0 = \sqrt{\frac{h_0}{4g}} = \left(\frac{3\mu_0 p^2}{512\pi m g^5}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Brezdimenzijsko Lagrangeevo funkcijo zapišemo kot

$$\frac{L}{4gmh_0} = \mathcal{L} = \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T \mathsf{U}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{4}V_0.$$

Ko rešimo Euler-Lagrangeeve enačbe, dobimo

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathsf{U}\boldsymbol{\eta} = 0.$$

Lastne frekvence ugotovimo tako, da poiščemo lastne vrednosti matrike $-\mathsf{U}$:

$$\det(\mathsf{U} - \omega^2) = 0.$$

Tako dobimo N lastnih frekvenc, vsaki pa lahko izračunamo lastni vektor. Za prvih nekaj primerov si poglejmo, kakšne so te vrednosti.

- $N = 1$: v tem primeru dobimo rešitev $y_1 = 1$ in $\mathsf{U} = [-1]$. Lastna vrednost matrike U je -1, torej gre za nihanje okoli ravnovesne lege s frekvenco $\omega_0 = t_0^{-1}$.
- $N = 2$: v tem primeru moramo pa že poseči po numeričnih orodjih. Sistem za določitev ravnovesne lege je še dovolj preprost, da ga lahko zapišemo v eno vrstico:

  $$1 = \frac{1}{y_1^4} - \frac{1}{(y_2 - y_1)^4}, \quad 1 = -\frac{1}{y_2^4} + \frac{1}{(y_2 - y_1)^4}.$$

  Rešitev tega sistema je $y_1^0 \approx 0{,}831\,364$ in $y_2^0 \approx 1{,}809\,376$. Hessejeva matrika potenciala je

  $$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} -3{,}6355 & 1{,}1175 \\ 1{,}1175 & -1{,}0660 \end{bmatrix}.$$

  Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = -4{,}054$ in $\lambda_2 = -0{,}648$. Lastni frekvenci sta $\omega_1 = 2{,}01 \cdot \omega_0$ in $\omega_2 = 0{,}805 \cdot \omega_0$. Lastna vektorja sta

  $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}67 \end{bmatrix}$$

  Prvi lastni način je, da magneta nihata v nasprotno smer, pri čemer spodnji magnet niha z višjo amplitudo. Drugi lastni način pa je, da oba nihata v fazi, zgornji z večjo amplitudo.
- $N = 3$: stvar se še nekoliko bolj zaplete, konceptualno pa ni bistveno težje. Ravnovesna lega je pri $\mathbf{y}^0 = (0{,}751, 1{,}568, 2{,}552)$. Matrika potenciala je

  $$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} -6{,}865 & 2{,}735 & -0{,}053 \\ 2{,}735 & -3{,}720 & 1{,}090 \\ -0{,}053 & 1{,}090 & -1{,}047 \end{bmatrix}$$

  Ta matrika ima lastne vrednosti $-8{,}495$, $-2{,}645$, $-0{,}492$, ki dajo lastne frekvence $\omega_1 = 2{,}91 \cdot \omega_0$, $\omega_2 = 1{,}63 \cdot \omega_0$ in $\omega_3 = 0{,}701 \cdot \omega_0$. Pripadajoči lastni načini so

  $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10{,}6 \\ -6{,}32 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}52 \\ -1{,}006 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}42 \\ 4{,}66 \end{bmatrix}.$$
- $N = 4$: ta primer je naveden, da ga lahko primerjamo s kasnejšimi približki. Rezultati pridejo:

  $$\mathbf{y}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}698\,335 \\ 1{,}4375 \\ 2{,}257\,59 \\ 3{,}238\,51 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} -10{,}454 & 4{,}532 & -0{,}108 & 0{,}009 \\ 4{,}532 & -7{,}012 & 2{,}696 & -0{,}053 \\ -0{,}108 & 2{,}696 & -3{,}705 & 1{,}101 \\ 0{,}009 & -0{,}053 & 1{,}101 & -1{,}055 \end{bmatrix},$$

  $$-\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 13{,}856 \\ 5{,}917 \\ 2{,}050 \\ 0{,}403 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}970 & -0{,}641 & 0{,}365 & 0{,}148 \\ -0{,}723 & -0{,}621 & 0{,}694 & 0{,}341 \\ 0{,}205 & 0{,}821 & 0{,}650 & 0{,}607 \\ -0{,}021 & -0{,}191 & -0{,}686 & 1{,}000 \end{bmatrix}.$$

  Prehodna matrika P, ki je sestavljena iz lastnih vektorjev, je bila pomnožena s tako konstanto, da je največji element enak ena.

Sedaj imamo že lep nabor zaporednih rešitev in lahko opazimo nekaj trendov. Prvi trend se lepo vidi, če ravnovesne pozicije označimo z oddaljenostjo od najvišjega:

$$\begin{array}{lllll} N=1: & 1{,}000 & & & \\ N=2: & 0{,}978 & 1{,}809 & & \\ N=3: & 0{,}984 & 1{,}801 & 2{,}552 & \\ N=4: & 0{,}981 & 1{,}801 & 2{,}540 & 3{,}239 \end{array}$$

Kot vidimo, se ravnovesne lege z dodajanjem magnetov praktično samo premaknejo. To je izjemno dobro iz praktičnega vidika, namreč sam numerični izračun ravnovesnih leg zahteva rešitev nelinearnega sistema N enačb. Pri $N = 4$ je še Mathematica pri najstrožjih predpostavkah potrebovala več kot minuto. Če pa lahko izkoristimo dejstvo, da se ravnovesne lege samo premaknejo, pa lahko pri izračunu za N magnetov uporabimo rezultat za $N - 1$ magnetov in imamo samo še eno neznanko. Za večjo natančnost lahko uporabimo samo pozicije $N - 2$ magnetov in zadnji dve izračunamo. Za ta izračun je dobro uvesti nove koordinate: $z_n = y_N - y_{N-n}$. Recimo, da že poznamo koordinate $\mathbf{z}$ za postavitev $N - 1$ magnetov. Kako bi ugotovili koordinate $\mathbf{z}$ za sistem N magnetov? V prvem približku lahko rečemo, da so $z_1, ..., z_{N-1}$ iste kot prej. Za določitev koordinate z_N pa uporabimo formulo (1) in vzamemo indeks $i = N$:

$$1 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\operatorname{sgn}(n-N)(-1)^{n-N}}{(y_n - y_N)^4} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)\cdot(-1)^{N-i-N}}{(y_{N-i} - y_N)^4} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^i}{z_i^4}.$$

Pri tem smo uporabili substitucijo $i = N - n$. S pomočjo tega izraza pa lahko z_N izrazimo celo analitično:

$$z_N = \left| 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(-1)^i}{z_i^4} \right|^{-\frac{1}{4}}.$$

Na žalost ta formula deluje samo, če je N dovolj velik. Za primer: če na ta način poiščemo vrednost z_4, pri čemer uporabimo eksaktne vrednosti z_1, z_2 in z_3, dobimo 3,8 namesto 3,24. Vseeno pa s to opazko lahko bistveno znižamo red enačbe. Možna poenostavitev bi bila tudi, da predpostavimo, da na položaj magneta vplivata samo njegova soseda. V tem primeru je sistem enačb, ki določa ravnovesno lego

$$1 = -\frac{1}{(y_i - y_{i+1})^4} + \frac{1}{(y_i - y_{i-1})^4}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N-1\}. \tag{2}$$

Za N-ti magnet pa preprosto rečemo, da je 1 nad predzadnjim. Tako dobimo zaporedje koordinat z (oddaljenosti od najvišjega magneta):

$$\begin{array}{lllllll} N=1: & 1{,}000 & & & & & \\ N=2: & 1{,}000 & 1{,}841 & & & & \\ N=3: & 1{,}000 & 1{,}841 & 2{,}601 & & & \\ N=4: & 1{,}000 & 1{,}841 & 2{,}601 & 3{,}308 & & \\ N=5: & 1{,}000 & 1{,}841 & 2{,}601 & 3{,}308 & 3{,}977 & \\ N=6: & 1{,}000 & 1{,}841 & 2{,}601 & 3{,}308 & 3{,}977 & 4{,}616 \end{array}$$

Dejstvo, da dodan magnet samo prestavi stolpec ostalih, v tem primeru kar bode v oči. Izkaže se, da tak pristop sploh ni zahteven, saj v tem primeru vsakič rešujemo "sistem" ene enačbe z eno neznanko (če poznamo prejšnjo rešitev). Če seštejemo vse enačbe (2), dobimo

$$N = \frac{1}{y_1^4} \implies y_1 = N^{-\frac{1}{4}}.$$

Iz tega lahko izpeljemo splošno formulo za y_n ter z_n:

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1} (N-i)^{-\frac{1}{4}}, \quad z_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-\frac{1}{4}}.$$

Matematik bi rekel, da se višina stolpca približuje številu $\zeta(1/4) = -0{,}81$. V resnici z večanjem števila magnetov višina stolpca divergira, gostota pri dnu pa se vedno veča. Relativne napake tega približka so okoli dva odstotka, kako se pa relativna napaka spreminja z večanjem števila N je pa težko reči, saj nimamo ustreznih točnih numeričnih rezultatov.

Poglejmo si še drugi trend, ki ga opazimo pri točnih rezultatih. Matrike U v svojem desnem spodnjem kotu vsebujejo skorajšnje kopije matrik U nižjih dimenzij. Poglejmo si, kaj dobimo, če ponovno zanemarimo interkacijo med vsemi nesosednjimi dipoli. Izvendiagonalni členi so vsi enaki 0, razen na pod- in naddiadonali, kjer velja

$$\mathsf{U}_{i,i-1} = \mathsf{U}_{i-1,i} = (N-i+1)^{\frac{5}{4}}.$$

Na diagonali velja

$$\mathsf{U}_{ii} = -(N-i+1)^{\frac{5}{4}} - (N-i)^{\frac{5}{4}}.$$

V splošnem bi lahko to zapisali kot

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} -N^{\frac{5}{4}} - (N-1)^{\frac{5}{4}} & (N-1)^{\frac{5}{4}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (N-1)^{\frac{5}{4}} & -(N-1)^{\frac{5}{4}} - (N-2)^{\frac{5}{4}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -3^{\frac{5}{4}} - 2^{\frac{5}{4}} & 2^{\frac{5}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2^{\frac{5}{4}} & -2^{\frac{5}{4}} - 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrika dimezije $N = 5$ je

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} -13{,}134 & 5{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}657 & -9{,}605 & 3{,}948 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}948 & -6{,}327 & 2{,}378 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}378 & -3{,}378 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

V desnem spodnjem kotu nastopajo matrike U vseh dimenzij do N. Poglejmo si rešitve od $N = 2$ do $N = 4$ in jih primerjajmo s točnimi rešitvami.

- $N = 2$: lastne vrednosti in (normirana) prehodna matrika:

$$-\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 3{,}743 \\ 0{,}635 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_\lambda = \begin{bmatrix} 0{,}077 \\ 0{,}020 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}74 & 1 \\ -1 & 2{,}74 \end{bmatrix}.$$

  Vektor $\boldsymbol{\delta}_\lambda$ pove relativno odstopanje lastne vrednosti od točne vrednosti.

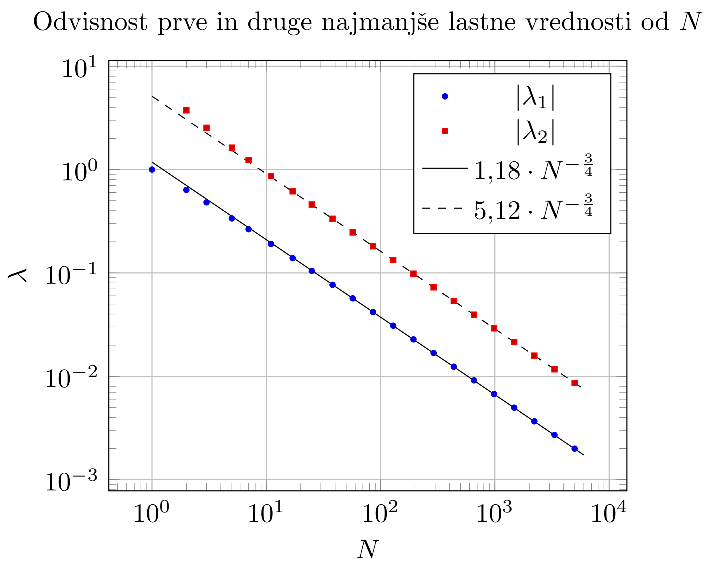
- $N = 3$:

$$-\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 7{,}687 \\ 2{,}537 \\ 0{,}482 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_\lambda = \begin{bmatrix} 0{,}095 \\ 0{,}041 \\ 0{,}020 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}992 & 0{,}533 & 0{,}211 \\ -0{,}567 & 0{,}850 & 0{,}518 \\ 0{,}085 & -0{,}553 & 1{,}000 \end{bmatrix}.$$

- $N = 4$:

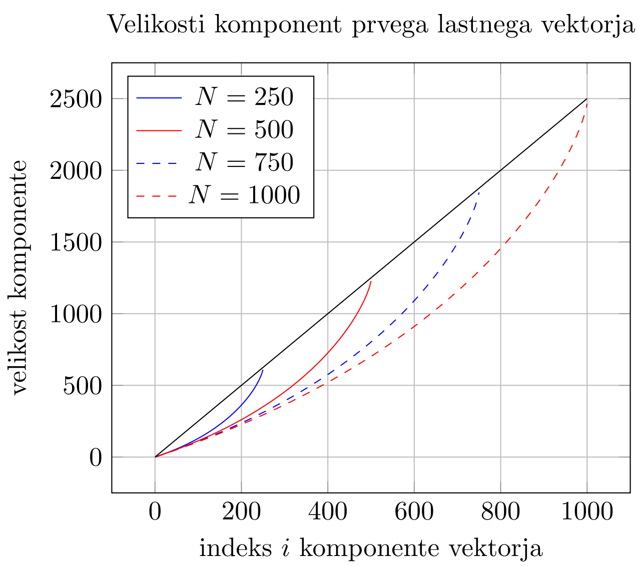
$$-\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 12{,}445 \\ 5{,}502 \\ 1{,}969 \\ 0{,}394 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_\lambda = \begin{bmatrix} 0{,}102 \\ 0{,}070 \\ 0{,}040 \\ 0{,}022 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}984 & 0{,}625 & -0{,}353 & 0{,}146 \\ -0{,}708 & 0{,}649 & -0{,}683 & 0{,}340 \\ 0{,}187 & -0{,}812 & -0{,}665 & 0{,}606 \\ -0{,}016 & 0{,}180 & 0{,}686 & 1{,}000 \end{bmatrix}$$

Videti je, kot da imajo lastne vrednosti z večjo vrednostjo večjo absolutno napako, enako velja za pripadajoče lastne vektorje. Poglejmo, kako se z večanjem N spreminja (absolutno gledano) najmanjša lastna vrednost in njen lastni vektor (to je tisti, pri katerem vsi magneti nihajo v fazi). Za to lastno vrednost smo lahko dokaj prepričani, da bo imela majhno napako, tudi ko večamo N. Nekaj prvih najmanjših lasnih vrednosti bi lahko izračunali analitično (v našem približku), vendar nam ne povejo nič pametnega. Lahko pa njihovo absolutno vrednost narišemo na graf v odvisnosti od N (glej sliko 2). Opaziti je, da se na podatke lepo prilegata krivulji $1{,}18 \cdot N^{-\frac{3}{4}}$ in $5{,}12 \cdot N^{-\frac{3}{4}}$ (razen na prvih nekaj, ker so obremenjeni s preveč diskretizacije). Razlog za to potenco in predfaktorja bo razložen pri obravnavi zveznega primera.



Slika 2: Prikaz prve in druge najmanjše lastne vrednosti sistema N magnetov v odvisnosti od števila magnetov N. Ta lastne vrednost se zadeva lastnega načina, kjer ima lastni vektor same pozitivne komponente. Sumljivo lepo na podatke fitata krivulji $1{,}18 \cdot N^{-\frac{3}{4}}$ in $5{,}12 \cdot N^{-\frac{3}{4}}$.

Za konec si poglejmo še lastni vektor pri najnižji lastni vrednosti. Vedno bo pomnožen s tako konstanto, da bo njegova najmanjša komponenta enaka 1. Poglejmo si komponente lastnih vektorjev, ki pripadajo najmanjši lastni vrednosti. Za $N = 250, 500, 750, 1000$ so komponente lastnih vektorjev prikazane na sliki 3.



Slika 3: Velikosti komponent lastnih vektorjev, ki ustrezajo načinu, ko vsi magneti nihajo v isti smeri. Vektorji so normirani tako, da ima najmanjša komponenta vrednost enako 1. Iz grafa je lepo razvidno, da nižji magneti v tem načinu nihajo bolj malo, višji magneti pa z večjo amplitudo. Zanimivo je to, da najvišji magnet niha z amplitudo, ki je $2{,}5 \cdot N$-krat večja od amplitude najnižjega magneta.

Kar lahko s tega grafa razberemo je nadvse presenetljivo. Prva opazka je, da vse krivulje izgledajo približno enako. Če bi skalirali vse krivulje na enako velikost, bi opazili, da zelo hitro konvergirajo k neki krivulji. Vidi se tudi, da nižji magneti nihajo z manjšo amplitudo kot višji. Še bolj presenetljivo pa je, da se te krivulje vse končajo zelo blizu vrednosti $2{,}5 \cdot N$. Da bi preveril, proti kateri številki konvergira razmerje prvega in zadnjega elementa lastnega vektorja, sem vzel zaporedje lastnih vektorjev pri dimenzijah, ki so večkratniki števila 2 ($N = 32$, $N = 64$, ...). Za vsak vektor sem določil to razmerje in ga delil z N. Tako sem dobil zaporedje 13 števil (dimenzija $N = 2^{13}$ je najvišja, pri kateri mi je uspelo najti lastni vektor v zglednem času), ki očitno konvergira. Z Aitkenovo Δ^2 metodo sem določil, da to zaporedje konvergira k vrednosti približno $\Xi = 2{,}4783$. Možno pa je, da je v eksaktnem primeru ta vrednost enaka kateri drugi številki.

Za konec si poglejmo še zvezno limito:

$$\ddot{y}_{N-n} = (n+1)^{\frac{5}{4}} y_{N-n-1} - [(n+1)^{\frac{5}{4}} + n^{\frac{5}{4}}] y_{N-n} + n^{\frac{5}{4}} y_{N-n+1}.$$

Vzemimo $x = 1 - \frac{n}{N}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{N}$ ter $u(x) = y(Nx)$. Dobimo:

$$\ddot{u}(x) = -(N - Nx + N\mathrm{d}x)^{\frac{5}{4}} \left[\frac{u(x) - u(x-\mathrm{d}x)}{N\mathrm{d}x}\right] + (N - Nx)^{\frac{5}{4}} \left[\frac{u(x+\mathrm{d}x) - u(x)}{N\mathrm{d}x}\right].$$

V oglatih oklepajih sta odvoda:

$$\ddot{u} = \frac{N^{\frac{5}{4}}}{N} \left[\frac{(1-x)^{\frac{5}{4}} u'(x) - (1-(x-\mathrm{d}x))^{\frac{5}{4}} u'(x-\mathrm{d}x)}{N\mathrm{d}x}\right],$$

$$N^{\frac{3}{4}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)^{\frac{5}{4}} \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Te diferencialne enačbe se lahko lotimo z Fourierovo metodo ločitve spremenljivk $u(x,t) = T(t)v(x)$. Dobimo

$$\frac{N^{\frac{3}{4}} T''(t)}{T(t)} = -a^2 = \frac{((1-x)^{\frac{5}{4}} v'(x))'}{v(x)}.$$

Rešitev časovnega dela je

$$T(t) = A\sin(\Omega t + \delta),$$

kjer je $\Omega^2 = a^2 N^{-\frac{3}{4}}$. Potenca na N nam je že znana z grafa 2, predfaktor a pa moramo še določiti. Enačbo za v pa rešimo tako, da najprej preoblikujemo v obliko

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{\frac{5}{4}} \frac{\partial}{\partial z} w(z)\right) + a^2 w(z) = 0.$$

To je Sturm-Liouvilleova enačba z robnima pogojema $w(1) = 0$ in $w(0) < \infty$. Splošna rešitev enačbe je

$$w(z) = z^{-\frac{1}{8}}\left(cJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3} a z^{\frac{3}{8}}\right) + dJ_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3} a z^{\frac{3}{8}}\right)\right).$$

Pogoj omejenosti v izhodišču da $d = 0$, pogoj $w(1) = 0$ pa da

$$J_{\frac{1}{3}}(8a/3) = 0.$$

Označimo z ω_n n-to ničlo Besselove funkcije reda 1/3. Dobimo lastne vrednosti SL problema $a_n = 3\omega_n/8$, lastne funkcije pa so

$$w_n(z) = z^{-\frac{1}{8}} J_{\frac{1}{3}}(\omega_n z^{\frac{3}{8}}).$$

Za $n = 1$ ta funkcija točno opiše obliko krivulje, dobljene na grafu 3. Če bi narisali velikosti komponent drugega lastnega vektorja, bi graf dobro opisala ta funkcija za $n = 2$. Splošna rešitev zgornje diferencialne enačbe za u je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\frac{1}{8}} J_{\frac{1}{3}}(\omega_n x^{\frac{3}{8}})(A_n \cos(3\omega_n N^{-\frac{3}{8}} t/8) + B_n \sin(3\omega_n N^{-\frac{3}{8}} t/8)),$$

kjer so A_n in B_n odvisni od začetnih pogojev. Po teoriji SL problemov so naše funkcije ortogonalne, kar pomeni, da je določanje parametrov iz začetnih pogojev zelo enostavno. Lastne funkcije te enačbe ustrezajo lastnim vektorjem naše matrike. Kvadrati lastnih frekvenc (Ω_n) so, kot že omenjeno,

$$\Omega_n^2 = N^{-\frac{3}{4}} a_n^2 = N^{-\frac{3}{4}} \frac{9\omega_n^2}{64}.$$

Iskani predfaktorji pred fiti na grafu 2 so

$$\Omega_1^2 N^{\frac{3}{4}} = \frac{9\omega_1^2}{64} = 1{,}1848, \quad \Omega_2^2 N^{\frac{3}{4}} = \frac{9\omega_2^2}{64} = 5{,}1179,$$

kar se popolnoma ujema z empiričnimi podatki. Zadnja skrivnost, ki jo je še potrebno razjasniti, je razmerje med velikostjo prve in zadnje komponente prvega lastnega vektorja (Ξ). To določimo tako, da raztegnemo funkcijo $w(z)$ za tak faktor, da bo $w'(1) = -1$ in potem odčitamo vrednost v $z = 0$. Imamo

$$\lim_{z\to 0} w(z) = \frac{3\omega_1^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\Gamma(1/3)} \quad \text{in} \quad w'(1) = \frac{3\omega_1}{8} J_{-\frac{2}{3}}(\omega_1).$$

Naj spomnem, da ω_n še vedno pomeni n-ta ničla Besselove funkcije $J_{\frac{1}{3}}$. Rezultat je

$$\Xi = -\frac{w(0)}{w'(1)} = -\frac{2^{\frac{8}{3}}}{\omega_1^{\frac{2}{3}}\Gamma(1/3) J_{-\frac{2}{3}}(\omega_1)} = 2{,}478\,286.$$

Kot kaže, je Aitkenova Δ^2 metoda dobro delovala, saj se rezultat ujema na štirih decimalnih mestih.

Na tej točki se zdi, da je obravnava problema nekako zaokrožena. Ugotovili smo najbolj splošno rešitev problema in kmalu za tem spoznali, da za $N > 5$ problem numerično postane praktično nerešljiv. V prvih nekaj točno rešenih primerih smo opazili nekaj zanimivosti, ki so nas napeljale na to, da uporabimo približek sosednjih magnetov. S tem približkom se da numerično reševati skorajda poljubne velikosti problema (omejujoč faktor je iskanje lastnih vrednosti in vektorjev v simetrični matriki). Za najmanjši dve lastni vrednosti, ki sta imeli tudi najmanjše odstopanje glede na točen izračun, smo opazovali, kako se spreminjata s spreminjanjem N in opazili nenavadno relacijo ($\lambda \propto N^{-\frac{3}{4}}$), ki je najprej nismo znali pojasniti. Za komponente pripadajočih lastnih vektorjev smo ugotovili, da so porazdeljene po enaki funkciji neodvisno od N, ter da je zadnja komponenta približno 2,48-krat večja od N-kratnika prve komponente. Številke 2,48 najprej nismo znali pojasniti, prav tako ne funkcije, po kateri so porazdeljene komponente lastnega vektorja. Na koncu smo si pogledali še zvezno limito, nam je odprla cel nekoliko drugačen pogled na problem in matematično odgovorila na vse prej nepojasnene opazke. Priznati je treba, da je obravnavan problem ponudil možnost bisveno globljne obravnave, kot se je na začetku zdelo, in skozi analizo zvezne limite ponudil analitičen odgovor na kvalitativna opažanja iz diskretnih primerov.