



Fizikalni praktikum III

Poročilo

Vaja: Upogib

Simon Bukovšek

Datum vaje: 11. 10. 2022
Datum oddaje poročila: 18. 10. 2022

1 Teoretični uvod

Upogib palice opisuje osnovna enačba palice:

$$f(x) = EJ u^{(4)}(x).$$

Pri tem je $f(x)$ strižna sila na enoto dolžine, E prožnostni modul palice, J vztrajnostni moment preseka in $u(x)$ odmik palice. Vztrajnostni moment preseka za okroglo palico je $\pi r^4/4$, kjer je r radij, za kvadratno palico pa je $a^4/12$, kjer je a stranica kvadratnega preseka. Velja, da je $f(x)$ prvi odvod strižne sile $F'(x)$ in hkrati drugi odvod navora $M''(x)$. V primeru, da imamo lahko palico postavljeno na dva podstavka na razdaljah $-l/2$ in $l/2$ od središča in jo obremenimo na sredini s strižno silo F_0 , veljajo naslednji pogoji:

- na vpetih točkah se palica ne more prestaviti: $u(-l/2) = u(l/2) = 0$;
- kjer je palica podstavljena, ne deluje noben navor: $M(-l/2) = M(l/2) = u''(-l/2) = u''(l/2) = 0$;
- strižna sila je povsod nič, razen v točki $x = 0$, kjer je F_0 : $\Delta u'''(0) = -F_0/EJ$,
- strižna sila na enoto dolžine je povsod nič: $u''''(x) = 0$.

Upoštevši vse te pogoje dobimo rešitev:

$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ} \left[1 - 6 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{|x|}{l} \right)^3 \right].$$

To pomeni, da se zaradi bremena na sredini palica ukrivi za:

$$u(0) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}.$$

Če nas zanima koliko se palica ukrivi zaradi lastne teže upoštevamo naslednje pogoje:

- na vpetih točkah se palica ne more prestaviti: $u(-l/2) = u(l/2) = 0$;

- kjer je palica podstavljena, ne deluje noben navor: $M(-l/2) = M(l/2) = u''(-l/2) = u''(l/2) = 0$;
- strižna sila na enoto dolžine je povsod enakomerna: $u'''(x) = \frac{mg}{l}$.

Rezultat pride:

$$u(x) = -\frac{mgl^3}{384EJ} \left[5 - 24 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 16 \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

2 Pripomočki

- Stojalo, mikrometerska ura;
- uteži, tehtnica;
- dve ravni palici z različnim presekom.

3 Meritve

Za obe palici smo izmerili odklon pri različnih utežeh. Zaradi morebitnega histereznega učinka smo merili enkrat z dodajanjem in drugič z odvzemanjem uteži.

4 Izmerjeni podatki

Najprej smo izmerili geometrijo in maso palic:

- razdalja med podpornima točkama na stojalu: $l = (56,1 \pm 0,1)$ cm;
- polmer okrogle palice: $r_0 = (3,50 \pm 0,05)$ mm;
- stranica preseka kvadratne palice: $a = b = (7,0 \pm 0,1)$ mm;
- dolžini obeh palic: $L_o = L_k = (64,0 \pm 0,1)$ cm;
- masa okrogle palice: $m_o = (206,67 \pm 0,01)$ g;
- masa kvadratne palice: $m_k = (259,55 \pm 0,01)$ g.

Zatem smo izmerili s kakšno silo pritiska mikrometerska ura v odvisnosti od premika. Podatki so prikazani v spodnji tabeli. Napaka pri merivi mase je izredno velika, meritve pa se precej malo spreminjajo, zato

Δx [mm] (± 0.01 mm)	m [g] (± 5 g)
1.00	60
2.00	84
3.00	86
4.00	94
5.00	98
6.00	95
7.00	98

bomo predpostavili, da je obremenitev zaradi mikrometerske ure konstantna in znaša $m_0 = (85 \pm 5)$ g. Glavna meritev je bila sestavljena iz merjenj upogiba palice pri različnih obremenitvah. V spodnji tabeli so prikazane meritve premika mikrometerske ure, ki pa še ne pomenijo upogiba, saj je pri manjšem upogibu mikrometerska ura bolj raztegnjena. Meritve za obe palici so v spodnji tabeli 1.

m [g]	kvadratna: h [mm] (± 0.01 mm)	okrogla: h [mm] (± 0.01 mm)
2000	0.94	1.12
1800	1.275	1.1
1600	1.60	2.2
1400	1.95	2.65
1200	2.27	3.11
1000	2.61	3.86
800	2.94	4.46
600	3.24	4.99
400	3.59	5.50
200	3.94	6.26
0	4.25	6.81
200	3.96	6.24
400	3.59	5.69
600	3.26	5.09
800	2.92	4.53
1000	2.57	3.89
1200	2.30	3.43
1400	1.92	2.62
1600	1.57	2.12
1800	1.25	1.46
2000	0.92	0.96

Tabela 1: Izmerjene deformacije kvadratne in okrogle palice pri različnih obremenitvah

5 Analiza podatkov

Preden lahko določimo prožnostna modula moramo izračunati vztrajnostna momenta presekov:

$$J_k = a^4/12 = (2,00 \pm 0,12) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4,$$

$$J_o = \pi r^4/4 = (1,18 \pm 0,07) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4.$$

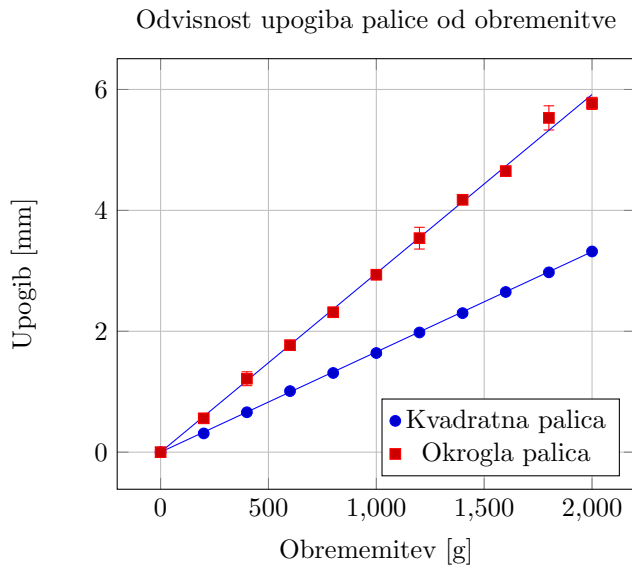
Potem moramo izračunati povprečje meritev odmikov in jih odšteti od odmika pri ničti obremenitvi. Dodatka mikrometerske ure ni potrebno dodajati, saj je enakomeren, nas pa bo zanimal samo naklon. Obdelani podatki so prikazani v spodnji tabeli 2 in na spodnjem grafu.

obremenitev [g] (± 1 g)	odmik kv. palice [mm]	odmik ok. palice [mm]
2000	$3,32 \pm 0,03$	$5,77 \pm 0,10$
1800	$2,98 \pm 0,03$	$5,53 \pm 0,20$
1600	$2,65 \pm 0,04$	$4,65 \pm 0,06$
1400	$2,30 \pm 0,04$	$4,18 \pm 0,04$
1200	$1,98 \pm 0,04$	$3,54 \pm 0,18$
1000	$1,64 \pm 0,04$	$2,94 \pm 0,04$
800	$1,31 \pm 0,03$	$2,32 \pm 0,06$
600	$1,01 \pm 0,03$	$1,77 \pm 0,07$
400	$0,66 \pm 0,02$	$1,22 \pm 0,12$
200	$0,31 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,03$
0	$0,00 \pm 0,02$	$0,00 \pm 0,02$

Tabela 2: Preračunane deformacije kvadratne in okrogle palice pri različnih obremenitvah

Naklona premic sta:

- kvadratna palica: $k_k = (1,658 \pm 0,020) \cdot 10^{-3} \text{ mm g}^{-1} = (1,658 \pm 0,020) \cdot 10^{-3} \text{ m kg}^{-1}$,
- okrogla palica: $k_o = (2,958 \pm 0,272) \cdot 10^{-3} \text{ mm g}^{-1} = (2,958 \pm 0,272) \cdot 10^{-3} \text{ m kg}^{-1}$.



Prožnostni modul izračunamo po enačbi

$$E = \frac{gl^3}{48kJ},$$

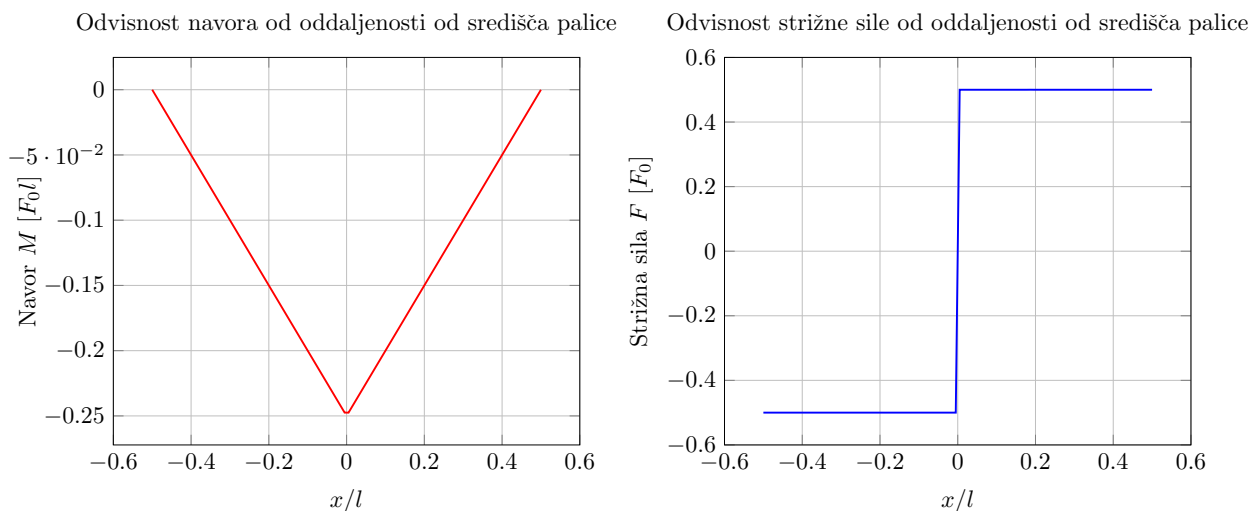
kjer je $g = (9,81 \pm 0,01) \text{ m s}^{-2}$ težni pospešek in k naklonski koeficient narisanih premic. Dobimo vrednosti:

$$E_k = (1,09 \pm 0,08) \cdot 10^{11} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$E_o = (1,03 \pm 0,18) \cdot 10^{11} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Obe vrednosti sta znotraj napake druge, kar pomeni, da sta materiala verjetno enaka, po podatkih iz literature bi lahko šlo za baker ali medenino.

Poglejmo si še, kako sta navor in strižna sila porazdeljena po dolžini palice. To predstavljata spodnja grafa.



Preverimo, da nismo preseгли največje dovoljene deformacije $\varepsilon = 0.1\%$. Velja seveda:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{y'_{\max}}{R_{\min}} = y'_{\max} u''(x)_{\max} = \frac{D}{2} \frac{F_0 l}{4EJ},$$

$$\therefore F_{\max} = \varepsilon \frac{8EJ}{Dt} \approx 25 \text{ N}.$$

Bili smo blizu te meje, nismo je pa presegli. Kvadratna palica bi se zaradi lastne mase posedla za: $u_{0k} = \frac{mgl^3}{48EJ} = 1,4 \text{ mm}$, okrogla pa za $u_{0o} = 2,0 \text{ mm}$, če računamo, kot da celotna sila teže prijmlje v eni točki na sredini. Če pa upoštevamo enakomerno razporeditev mase, dobimo rezultata za faktor $5/8$ manjša, torej $u_{1k} = 2,0 \text{ mm}$ in $u_{1o} = 0,9 \text{ mm}$.

Za konec preverimo še gostoti obeh palic, da se zares prepričamo, če sta iz enakih materialov. Gostoti sta sledeči:

$$\rho_k = (8276 \pm 244) \text{ kg m}^{-3} \quad \rho_o = (8428 \pm 252) \text{ kg m}^{-3}.$$

Vrednosti sta znotraj napak, zato lahko trdimo, da gre za isti material.