



Fizikalni praktikum IV

Poročilo

Vaja: Skopljena nihajna kroga

Simon Bukovšek

Datum vaje: 8. maj 2023

Datum oddaje poročila: 15. maj 2023

1 Teoretični uvod

Pri tej vaji smo obravnavali dva električna nihajna kroga. En sam nihajni krog, sestavljen iz kondenzatorja kapacitivnosti C in tuljave induktivnosti L niha s krožno frekvenco

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Če imamo v nihajnem kroguvezan še upor z upornostjo R , nastopi še dušenje, ki ga opišemo s koeficientom $\beta = R/2L$. Sistem opisujejo enačbe za dušeno nihanje z rešivijo

$$I(t) = e^{-\beta t}(I_1 \sin(\omega' t) + I_2 \cos(\omega' t)), \text{ kjer je } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Če k prvemu krogu vežemo še en identičen sistem preko kondenzatorja C_0 , potem dobimo sklopljen sistem nihajnih krogov. Zaradi dveh prostostnih stopenj imamo sedaj dva lastna načina nihanja. Prvi je enak kot prej na obeh na obeh krogih na enkrat, drug lasten način pa je

$$U_{1,2} = \pm U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega'' t), \text{ kjer je } \omega'' = \sqrt{\frac{C}{C - C_0} \omega_0^2 - \beta^2}.$$

Splošno obnačanje sistema opišemo kot linearno kombinacijo obeh lastnih nihanj:

$$U_{1,2} = (U' \cos(\omega' t) \pm U'' \cos(\omega'' t + \delta)) e^{\beta t}.$$

2 Pripomočki

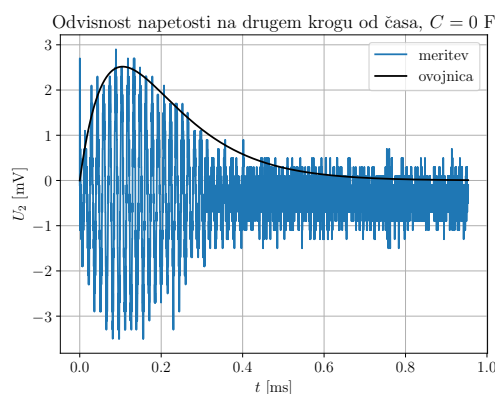
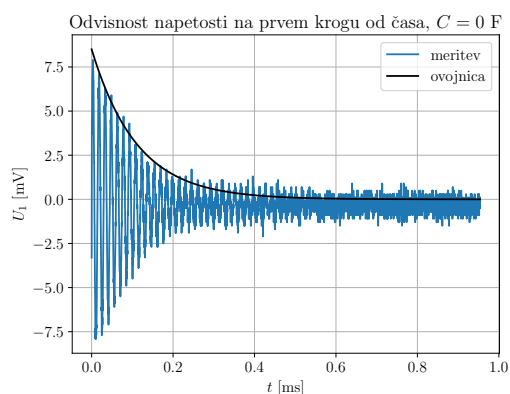
- Digitalni osciloskop (SigLent SDS 1104X-E);
- funkcijski generator napetosti (SigLent SGD 1032X), namizni multimeter (SigLent SDM 3065X);
- nihajna kroga in kabli, USB ključek;
- prenosnik s programom SkNiKr napisan v LabView.

3 Izmerjeni podatki in analiza

Nihajna kroga sta sestavljena iz tuljave z induktivnostjo L , kondenzatorja s kapacitivnostjo $C = 5.6 \text{ nF}$ in uporom z upornostjo $R = 7.5 \Omega$. Najprej smo priklopili nihajna kroga na osciloskop in vir stopničaste napetosti. Izmerili smo odziv prvega in drugega nihajnega kroga pri različnih sklopitvah, med $C_0 = 0 \text{ F}$ do $C_0 = 1150 \text{ pF}$. Na spodnjih dveh grafih je prikazan odziv brez sklopitve. Tedaj sta obe lastni nihanji enaki, zato imamo samo eno prostostno stopnjo. Rešitvi sta

$$U_1(t) = U_0 \cos(\omega' t) e^{-\beta t}, U_2(t) = U_0 \omega' t \cos(\omega' t) e^{-\beta t}.$$

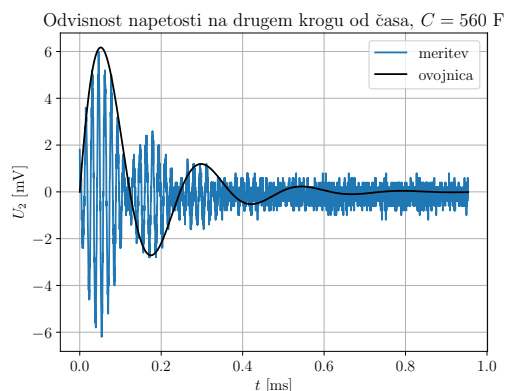
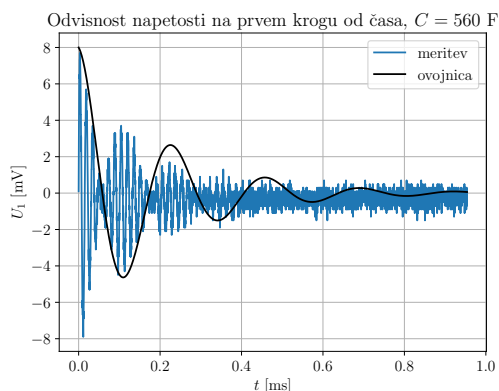
Ta nihajna načina sta lepo razvidna iz spodnjih grafov.



Razberemo lahko, da je krožna frekvenca približno $\omega' = (4.21 \pm 0.12) \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$. Če predpostavimo $\omega \gg \beta$ (kar lahko naredimo, saj je sistem še daleč od kritičnega dušenja), dobimo $L = (9.9 \pm 0.4) \cdot 10^{-4} \text{ H}$. Pri sklopitvenih kondenzatorjih, ki imajo neničelno kapacitivnost, pa lahko ob stopničastemu začetnemu signalu opazimo utripanje, ki se opiše kot:

$$U_1(t) = U_0 \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2} t\right) \cos((\omega' - \omega'')t) e^{-\beta t}, \quad U_2(t) = U_0 \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2} t\right) \sin((\omega' - \omega'')t) e^{-\beta t}.$$

Pri tem je $\Delta\omega = \omega' - \omega''$ frekvenca utripanja in je odvisna od kapacitivnosti sklopitvenega kondenzatorja C_0 . Za primer $C_0 = 650 \text{ pF}$ sta odvisnosti napetosti od časa prikazana na spodnjih grafih.



Za vse različne kondenzatorje, ki smo jih imeli na voljo, smo izmerili odziv na stopničast signal na obeh krogih in za vsak odziv izračunali $\Delta\omega$ in β . Te smo določili s pomočjo vrhov ovojnice. Izračuni so podani v spodnji tabeli.

Povprečen faktor dušenja β je

$$\beta = (5400 \pm 700) \text{ s}^{-1}.$$

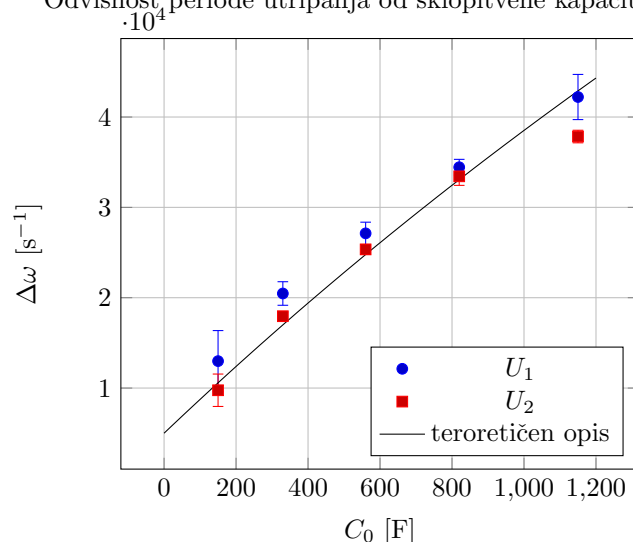
C [pF]	krog	β [s ⁻¹]	t_0 [ms]	$\Delta\omega$ [s ⁻¹]
0	U_1	$10\,520 \pm 150$	$(4.09 \pm 0.01) \cdot 10^5$	$(4.09 \pm 0.01) \cdot 10^5$
	U_2	932 ± 150	$(4.33 \pm 0.01) \cdot 10^5$	$(4.33 \pm 0.01) \cdot 10^5$
330	U_1	4779 ± 133	$(1.54 \pm 0.09) \cdot 10^{-4}$	$(2.05 \pm 0.13) \cdot 10^4$
	U_2	6230 ± 274	$(1.75 \pm 0.04) \cdot 10^{-4}$	$(1.80 \pm 0.04) \cdot 10^4$
150	U_1	5307 ± 189	$(2.42 \pm 0.50) \cdot 10^{-4}$	$(1.30 \pm 0.33) \cdot 10^4$
	U_2	4687 ± 383	$(3.22 \pm 0.50) \cdot 10^{-4}$	$(9.8 \pm 1.8) \cdot 10^3$
560	U_1	4849 ± 120	$(1.16 \pm 0.05) \cdot 10^{-4}$	$(2.71 \pm 0.12) \cdot 10^4$
	U_2	6672 ± 243	$(1.24 \pm 0.03) \cdot 10^{-4}$	$(2.53 \pm 0.05) \cdot 10^4$
820	U_1	4648 ± 116	$(9.12 \pm 0.22) \cdot 10^{-5}$	$(3.44 \pm 0.08) \cdot 10^4$
	U_2	5687 ± 178	$(9.40 \pm 0.27) \cdot 10^{-5}$	$(3.34 \pm 0.10) \cdot 10^4$
1150	U_1	5482 ± 143	$(7.44 \pm 0.41) \cdot 10^{-5}$	$(4.22 \pm 0.25) \cdot 10^4$
	U_2	6032 ± 177	$(8.30 \pm 0.15) \cdot 10^{-5}$	$(3.78 \pm 0.07) \cdot 10^4$

Če izračunamo β iz podanih in izračunanih vrednosti L in R , dobimo

$$\beta' = \frac{R}{2L} = (3790 \pm 160) \text{ s}^{-1},$$

kar močno odstopa od izmerjene vrednosti. Frekvence utripanja smo nanesti na graf v odvisnosti od sklopitvenega kondenzatorja.

Odvisnost periode utripanja od sklopitvene kapacitivnosti



Zraven je narisana še funkcija

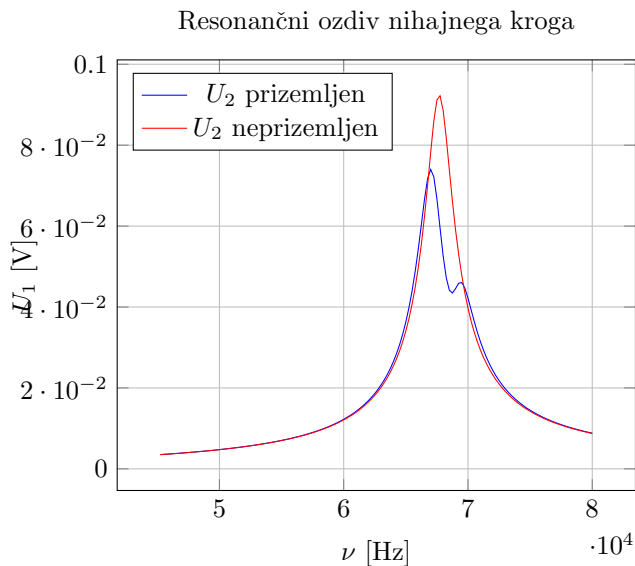
$$\Delta\omega = \omega' - \sqrt{\frac{C}{C + C_0}(\omega'^2 + \beta^2) - \beta^2} + (\Delta\omega)_I,$$

kjer smo za β in ω' vzeli izračunane vrednosti. Za boljše ujemanje pa smo dodali še konstanten člen $(\Delta\omega)_I = 5000 \text{ s}^{-1}$, ki bi lahko bil posledica induktivne sklopitve med tuljavama.

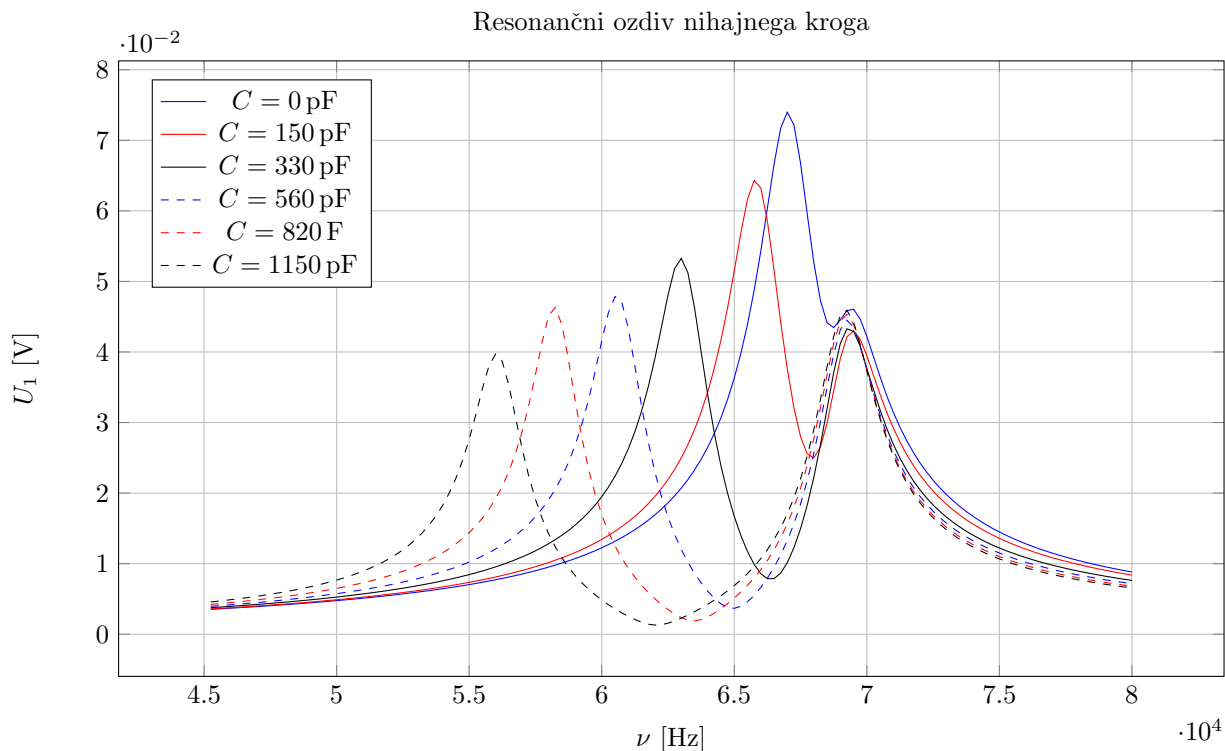
Nato smo opazovali resonančni odziv sistema na vsiljeno sinusno nihanje brez sklopitvenega kondenzatorja. Merili smo v dveh načinih: ko je bil drugi krog prizemljen (rdeča krivulja na spodnjem grafu), in ko ni bil (modra krivulja na spodnjem grafu). Pri neprizemljenem drugem krogu lahko opazimo dva vrhova, ki ustrezata dvem različnim lastnim nihanjem. Ker kapacitivne sklopljenosti ni, je ena od možnih razlag induktivna sklopljenost tuljav. Če se osredotočimo na odziv pri ozemljenem drugem krogu, lahko izračunamo doborto Q prvega nihajnega kroga. To je, kolikšen delež amplitude izgubi nihanje v enem radianu poti. To se lahko izračuna kot lastna frekvenca deljena s polno širino resonančne krivulje. Vrh je pri vrednosti $\nu_0 = (67\,600 \pm 100) \text{ Hz}$ in ima širino $\Delta\omega = (2000 \pm 200) \text{ Hz}$. Iz širine vrha lahko izračunamo doborto:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 33.8 \pm 3.8.$$

Po drugi strani pa velja $\Delta\omega = 2\beta$, od koder dobimo še eno oceno za faktor dušenja: $\beta'' = (6300 \pm 600) \text{ s}^{-1}$.



Nato smo merili resonančne odzive prvega nihajnega kroga pri različnih kapacitivnih sklopljenostih z drugim (neprizemljenim) krogom.



Kot je razvidno iz zgornjega grafa, ena lastna frekvenca vedno ostaja enaka. To je lastna frekvenca enega nihajnega kroga, ki je rahlo induktivno sklopljen z drugim. V naših meritvah pride okoli $\nu' = (69.3 \pm 0.1) \text{ kHz}$. Druga lastna frekvenca pa se z večanjem kapacitivnosti vedno bolj oddaljuje proti nižjim frekvencam in intenziteta vrha se vedno bolj zmanjšuje. Razberemo vrhove, ki so podani v spodnji tabeli.

Razliko med lastnima frekvencama lahko narišemo v odvisnosti od kapacitete sklopitvenega kondenzatorja. Spodnji graf nam kaže lepo linearno odvisnost. Kako si lahko to linearno odvisnost interpretiramo?

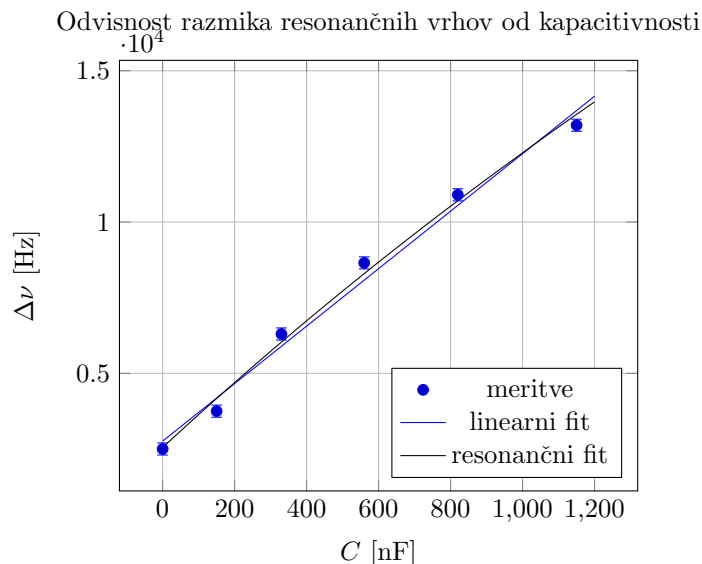
C [nF]	ν_1 [Hz] (± 125 Hz)	ν_2 [Hz] (± 125 Hz)	$\Delta\nu$ [Hz] (± 200 Hz)
0	67000	69500	2500
150	65750	69500	3750
330	63000	69300	6300
560	60600	69250	8650
820	58350	69250	10900
1150	56000	69200	13200

Razlika med vrhovoma je

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\omega' - \sqrt{\frac{C}{C+C_0}(\omega'^2 + \beta^2) - \beta^2} \right) + (\Delta\nu)_I,$$

kjer je $(\Delta\nu)_I$ posledica induktivne sklopitve. Najprej predpostavimo, da je $\beta \ll \omega'$, in potem da je $C_0 \ll C$. Dobimo

$$\Delta\nu = \frac{\omega' C_0}{2\pi 2C} + (\Delta\nu)_I.$$



Premica ima enačbo:

$$\Delta\nu = (9.5 \pm 0.2) \text{ Hz pF}^{-1} \cdot C + (2760 \pm 130) \text{ Hz}.$$

Ob upoštevanju $C = 5.6$ nF, dobimo

$$\omega' = 2\pi kC = (3.3 \pm 0.1) \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

in

$$(\Delta\omega)_I = (17300 \pm 700) \text{ s}^{-1}.$$

Na podatke pa lahko fitamo tudi prvotno, bolj zapleteno enačbo (resonančni fit). Razlika je minimalna.

Nazadnje smo opazovali še fazno razliko med prvim in drugim krogom pri največji sklopitvi. Pri prvem vrhu je bila fazna razlika pol nihajnega kroga, pri drugem vrhu pa nič.