



Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za matematiko*
in fiziko

ODDELEK ZA FIZIKO

Poševni met s kvadratnim uporom in Coriolisovo silo

Zaključna naloga v sklopu predmeta
Računalniška orodja v fiziki

Avtor: Simon Bukovšek
Predavatelj: Izr. prof. dr. Daniel Svenšek
Asistent: Doc. dr. Martin Horvat
Datum: 10. junij 2022

AKADEMSKO LETO 2021/2022

Kazalo

1	Uvodna beseda	2
2	Teoretični uvod	2
2.1	Sila teže	2
2.2	Sila upora	2
2.3	Barometriška enačba	3
2.4	Coriolisova sila	3
2.5	Povzetek dinamike	4
3	Analiza kvadratnega zakona upora	4
3.1	Analiza brez barometriške korekcije	5
3.2	Barometriška korekcija	7
4	Analiza vpliva prečnega vetra	8
4.1	Kvalitativna analiza	8
4.2	Analiza oddaljenosti od brezvetrne točke	9
4.3	Analiza oddaljenosti v x in y smeri	10
5	Analiza vpliva Coriolisove sile	12
6	Zaključek	14

1 Uvodna beseda

To je poročilo zaključnega projekta izbirnega predmeta Računalniška orodja v fiziki v drugem semestru prve stopnje študija fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. V projektu so bili numerično analizirani različni vplivi na pot izstrelka, katerega rezultati so predstavljeni v tem poročilu.

Tehnični komentar: v besedilu se uporablja zapis vektorjev s krepkim fontom. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ predstavlja vektor, v predstavlja velikost tega vektorja in $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$ predstavlja enotski vektor v smeri vektorja \mathbf{v} . Ob poročilu so za boljšo predstavbo priložene še animacije za vsak tridimenzionalen graf. Na žalost jih podpira samo Adobe Acrobat Reader.

2 Teoretični uvod

Na balističen izstrelak deluje med letom kopica zunanjih sil. V tej nalogi se bomo osredotočili na naslednje tri: silo teže, silo upora in Coriolisovo silo. Označimo z $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ radij vektor izstrelka, z $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ njegovo hitrost in z $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ njegov pospešek. Te tri količine povezujeta enačbi (1) in (2):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1)$$

in

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}. \quad (2)$$

Koordinatni sistem usmerimo tako, da x -os kaže proti jugu, y -os proti vzhodu in z -os proti zenitu. Izstrelišče postavimo v izhodišče $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$. Ker so dometi izstrelkov pri danih pogojih velikostnega reda nekaj kilometrov, ukrivljenosti Zemljinega površja ne upoštevamo.

2.1 Sila teže

Na izstrelak ves čas deluje sila teže, ki jo opisuje enačba (3):

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}, \quad (3)$$

pri čemer je m masa izstrelka in \mathbf{g} gravitacijski pospešek, ki v našem koordinatnem sistemu kaže v negativni z smeri: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Pri danih pogojih v nalogi izstrelak ne bo dosegel višine več kot nekaj kilometrov, zato lahko spreminjanje gravitacijskega pospeška z višino zanemarimo. Prav tako lahko predpostavimo, da je centrifugalni pospešek zaradi neinerčnega opazovalnega sistema vrteče Zemlje upoštevan v vrednosti g .

2.2 Sila upora

Ker izstrelak ne leti v vakuumu, deluje nanj upor zraka. Hitrosti, ki jih izstrelak dosega, so reda nekaj sto metrov na sekundo, zato bo nanj deloval izključno kvadratni (torej neviskozni) upor. Kot je iz imena razvidno, je odvisen od kvadrata relativne hitrosti izstrelka glede na zrak. Opisuje ga enačba (4):

$$\mathbf{F}_u = -\frac{1}{2}c_u\rho S v_{\text{rel}}^2 \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}}. \quad (4)$$

Pri tem ρ predstavlja gostoto zraka, S površino izstrelka, \mathbf{v}_{rel} relativno hitrost izstrelka glede na zrak in c_u koeficient kvadratnega upora. Slednji je brezdimenzijska konstanta, ki je odvisna od oblike predmeta. Običajno je reda velikosti 1, zato bomo kar privzeli, da za naš izstrelak velja $c_u = 1$ in ga bomo v nadaljnjih enačbah izpuščali. V brezvetrju velja $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}$, če pa piha veter, ki ga predstavlja vektorsko polje $\mathbf{v}_v(x, y, z) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$, pa velja enačba (5):

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_v(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Pri tem sta \mathbf{r} in \mathbf{v} vektorja pozicije in hitrosti izstrelka. Pri tem projektu veter ne bo odvisen od pozicije, zato si ga ni potrebno predstavljati kot vektorsko polje.

2.3 Barometrsko enačba

Ker lahko izstrelek doseže višino nekaj kilometrov, je lahko predpostavka, da je gostota zraka ρ povsod enaka, napačna. V določenem delu naloge bomo upoštevali tudi odvisnost gostote zraka od višine. To odvisnost podaja *Barometrsko enačba* (6). Ta sledi iz predpostavke, da ima ozračje temperaturo T , neodvisno od višine. Zapišimo infinitezimalno spremembo tlaka dp , ko se dvignemo za višino dh :

$$dp = \rho(h)gdh = p \frac{gM}{RT} dh.$$

M je molska masa zraka, g je velikost gravitacijskega pospeška in R je splošna plinska konstanta. Rešimo separabilno diferencialno enačbo in upoštevamo, da velja $p(h=0) = p_0$:

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} = \frac{gM}{RT} \int_0^h dh.$$

Dobimo barometrsko enačbo izraženo s tlakom:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{gMh}{RT}} = \rho_0 e^{-\lambda h}.$$

Pri tem smo uvedli novo spremenljivko $\lambda = \frac{gM}{RT}$. Ker po splošni plinski enačbi velja $\rho \propto p$, lahko barometrsko enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{gMz}{RT}} = \rho_0 e^{-\lambda z}, \quad (6)$$

kjer ρ_0 je gostota zraka na višini izstrelišča.

2.4 Coriolisova sila

Zadnji efekt, ki ga bomo upoštevali, je *Coriolisova sila*. Naj vektor \mathbf{r}_i predstavlja oddaljenost objekta od središča vrtenja v inercialnem opazovalnem sistemu in naj \mathbf{r}_r predstavlja to oddaljenost v vrtečem koordinatnem sistemu. Označimo vektor kotne hitrosti vrtenja z $\boldsymbol{\omega}$. Velja enačba (7):

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (7)$$

Označimo $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ in $\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}_r}{dt}$. Odvajamo enačbo (7) in dobimo enačbo (8):

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i. \quad (8)$$

Ker vemo, da je $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, lahko to vstavimo v enačbo (8), malo predelamo in dobimo enačbo (9):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_r + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r) \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r) \end{aligned} \quad (9)$$

V enačbi (9) smo uvedli nove oznake: $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ in $\mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$, ki nam precej jasno razložijo, kaj pomenijo posamezne komponente. Člen \mathbf{a}_i je pospešek v inercialnem sistemu, kjer veljajo Newtonovi zakoni. Člen \mathbf{a}_r je pospešek v vrtečem se opazovanem sistemu in je za opazovalca na Zemlji edini neposredno izmerljiv. Člen $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ je Coriolisov pospešek in člen $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r)$ je centrifugalni pospešek. Slednji kaže pravokotno na $\boldsymbol{\omega}$ in leži v ravnini, ki jo tvorita vektorja $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{r} . Pri izračunih bi morali upoštevati oba zadnja člena, vendar je $\omega \ll 1$, zato bomo smer centrifugalnega pospeška, ki ne kaže v smeri stran od središča Zemlje, zaradi vsebovanega člena ω^2 zanemarili. Če bi šli računati, kolikšna je ta komponenta pospeška za naše geografske širine, bi ugotovili, da je po velikosti primerljiva s Coriolisovim pospeškom, ker vsebuje vektor \mathbf{r}_r , ki je oddaljenost od središča Zemlje. Kljub temu bomo to zanemarili, vendar se moramo zavedati, da bodo naši rezultati dali nekoliko večje domete, kot bi izmerili, če bi poskus praktično izvedli. Komponenta centrifugalnega pospeška, ki kaže v smeri od središča Zemlje pa je že vsebovana v gravitacijskem pospešku

g. Pomnožimo enačbo (9) z maso objekta, zanemarimo centrifugalni pospešek in dobimo, da je razlika vsot sil med inercialnim in vrtečim opazovalnim sistemom enaka sili, imenovani Coriolisova sila (10):

$$\mathbf{F}_c = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (10)$$

V enačbi (10) vektor \mathbf{v} predstavlja hitrost izstrelka, ki jo seveda merimo v vrtečem koordinatnem sistemu. V koordinatnem sistemu izstrelka ima vektor $\boldsymbol{\omega}$ obliko $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, kjer je φ zemljepisna širina izstrelišča.

2.5 Povzetek dinamike

Pospešek izstrelka lahko sedaj napišemo v eni enačbi, ki upošteva vse omenjene efekte (11):

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{g} - \frac{1}{2m}\rho_0 e^{-\lambda z} S |\mathbf{v} - \mathbf{v}_v| (\mathbf{v} - \mathbf{v}_v) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (11)$$

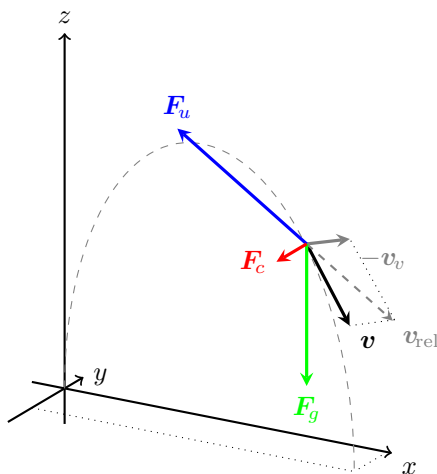
\mathbf{a} je funkcija vektorjev \mathbf{v} in \mathbf{r} ter tudi časa. Tega se moramo dobro zavedati, saj sta \mathbf{v} in \mathbf{r} odvisna od časa. S tem smo prišli do sistema enačb, ki se ga da lepo numerično implementirati (12):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

z začetnimi pogoji (13):

$$\mathbf{r}(t=0) = (0, 0, 0) \quad \text{in} \quad \mathbf{v}(t=0) = (v_0 \cos\theta, 0, v_0 \sin\theta). \quad (13)$$

V enačbi (13) predstavlja v_0 začetno velikost hitrosti in θ kot nad površjem, pod katerim se izstrelak izstrelji. Na Sliki 1 so prikazani vektorji, ki delujejo na izstrelak med letom. Coriolisova sila (rdeče) kaže vzporedno z xy ravnino in je pravokotna na vektor hitrosti (črno), sila teže kaže v $-z$ smeri (zeleno) in sila upora (modro) kaže v nasprotni smeri kot relativna hitrost. Zaradi preglednosti je narisana minus vektor hitrosti vetra (sivo), ki leži v vodoravni ravnini (xy). Vektor hitrosti je tangencialen na pot izstrelka.



Slika 1: Prikaz sil, ki delujejo na izstrelak med letom. Z rdečo je prikazana Coriolisova sila, z modro sila upora in z zeleno sila teže. Črn vektor je hitrost izstrelka, siv je minus hitrost vetra in črtkan je relativna hitrost izstrelka glede na zrak. Vektorji niso v merilu, kažejo pa v pravih smereh. Animacija je dostopna med priponkami, nosi ime vektorji.pdf, ali pa s klikom na [to povezavo](#).

3 Analiza kvadratnega zakona upora

V tem delu ne bomo upoštevali vetra in Coriolisove sile. V tem in vseh sledečih poglavjih bomo uporabljali naslednje vrednosti:

- masa izstrelka $m = 45,6$ kg;
- prečni presek izstrelka $S = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 26,7 \text{ cm}^2$;
- gostota zraka pri izstrelišču $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$;
- geografska širina izstrelišča $\varphi = 46,042^\circ$ (Peterlinov paviljon);
- velikost gravitacijskega pospeška $g = 9,81 \text{ m/s}^2$;
- velikost hitrosti izstrelka ob izstrelitvi $v_0 = 314,15 \text{ m/s} \approx 100\pi \text{ m/s}$.

Za simulacije je bil uporabljen programski jezik Python in funkcija `solve_ivp` iz modula `scipy.integrate`. Diferencialna enačba, ki jo je program reševal, je enačba (12), z začetnimi pogoji (13).

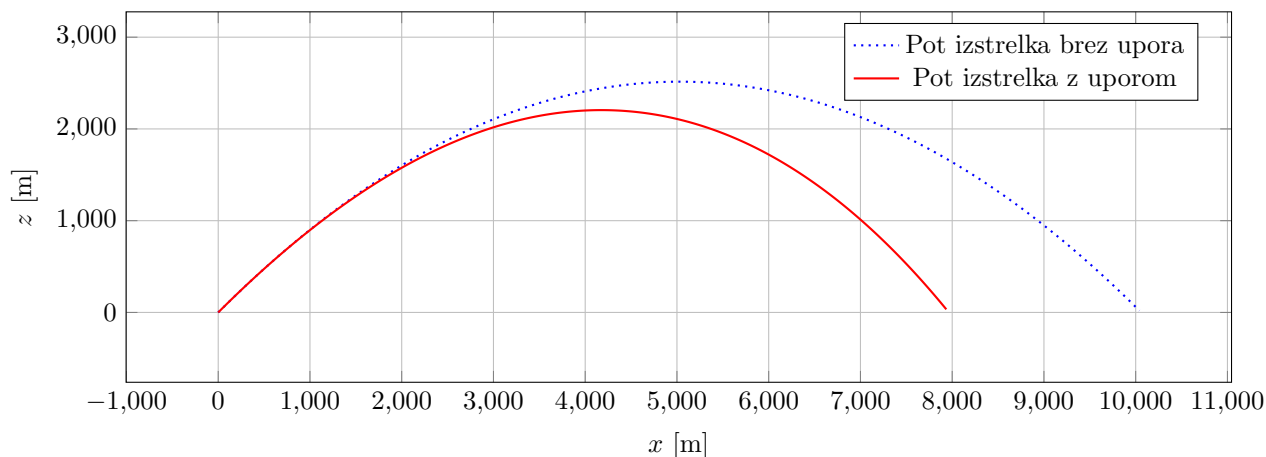
Kot rečeno, v tem delu ne bomo upoštevali Coriolisove sile, torej bomo predpostavili $\omega = 0$.

3.1 Analiza brez barometrijske korekcije

Ker ne želimo upoštevati barometrijske enačbe, preprosto predpostavimo, da velja $\lambda = 0$. Tako lahko še vedno delamo z enačbo (11). Najprej nas zanima kako kvadratni upor vpliva na obliko poti izstrelka v primerjavi s potjo brez upora. Pot izstrelka, izstreljenega iz izhodišča v smeri x pod kotom θ s hitrostjo v_0 , brez upora lepo opisuje parabola z enačbo (14):

$$z(x) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (14)$$

Na sliki 2 lahko vidimo pomembne razlike, ki jih ustvari upor. Domet skrajša za več kot 20%. Najvišja dosežena višina je nižja in pot nima več oblike parabole. Prvih 2000 m se grafa precej dobro ujemata, potem pa se začnejo kazati razlike. Opazimo lahko tudi, da izstrelki brez upora na tla prileti pod istim kotom, kot je bil izstreljen, medtem ko izstrelki z uporom prileti pod večjim kotom. To je preprosto posledica tega, da je povprečna hitrost v x smeri večja kot povprečna hitrost v z smeri (ta je vmes enkrat celo 0), zato upor bolj deluje v x smeri, česar posledica je večji naklon.



Slika 2: Pot izstrelka, izstreljenega pod kotom 45° glede na vodoravnico v smeri x , brez in z uporom

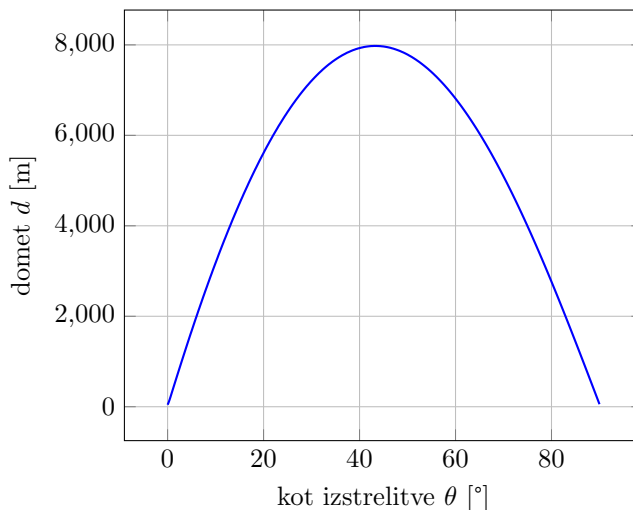
Zanima nas, kako vpliva kot izstrelitve glede na vodoravnico na domet izstrelka. Če ne bi bilo upora, se da domet d analitično določiti z enačbo (15):

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}. \quad (15)$$

Največji možen domet pri nespremenljivi začetni hitrosti je dosežen pri kotu $\theta = 45^\circ$.

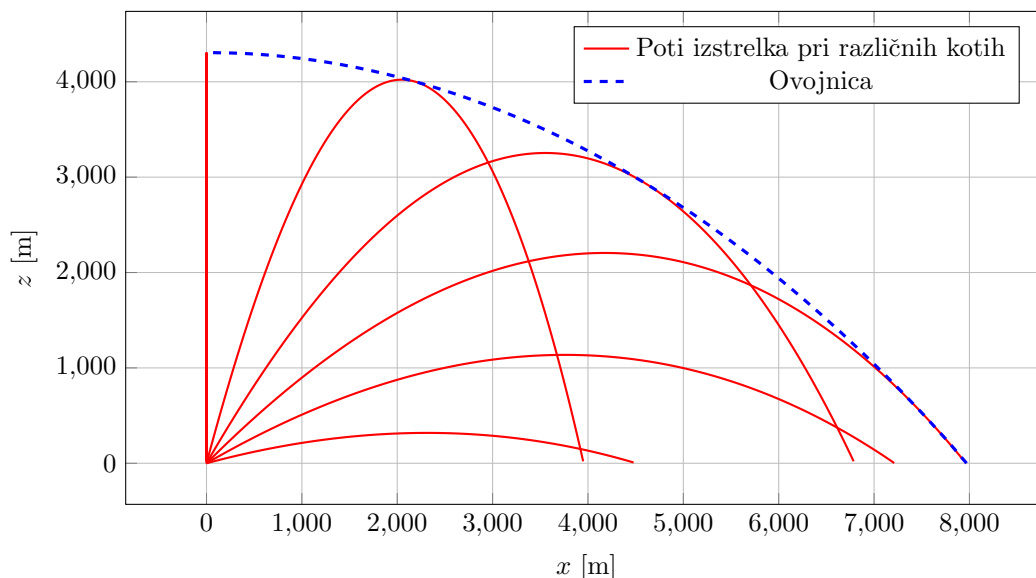
Pa si pogledjmo, če lahko podobne lastnosti najdemo tudi ob upoštevanju upora. Na grafu 3 je narisana domet izstrelka za različne kote izstrelitve θ . Pri majhnih kotih je domet majhen, saj izstrelki takoj pade

na tla, in pri velikih kotih je dolet majhen, saj izstrelek nima veliko y komponente hitrosti. Ne da bi narisali graf dometa brez upora, lahko sklepamo, da je dolet za vsak kot $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ z upoštevanjem upora manjši. Ko pa si graf ogledamo še bližje, ugotovimo, da dolet maksimuma ne doseže pri kotu 45° ampak nekoliko manjšem kotu $\theta_{\max} = 43,3^\circ$, kjer je dolet 7978 m. Optimalni kot je manjši kot v primeru brez upora, ker je zaradi upora energijsko bolj ugodno narediti manj poti. Pri manjšem kotu pa je pot krajša.



Slika 3: Graf prikazuje kako se spreminja dolet izstrelka ob upoštevanju kvadratnega zakona upora za različne kote izstrelitve pri konstantni izstrelitveni hitrosti

Lahko si ogledamo še eno lastnost poševnega meta, imenovano *ovojnica*. To je krivulja, ki loči prostor, ki ga z izstrelkom lahko dosežemo, in prostor, ki ga ne moremo. Grafično jo prikazuje slika 4.



Slika 4: Ovojnica izstrelka z uporom in nekaj primerov poti

Ovojnico za met brez upora opisuje enačba (16):

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}. \quad (16)$$

V splošnem, če imamo družino krivulj oblike $z = f(x, \theta)$, kjer je θ parameter, lahko ovojnico dobimo z

uvvedbo nove funkcije $F(x, z, \theta) = 0$. Tedaj ovojnico opisuje rešitev sistema enačb (17):

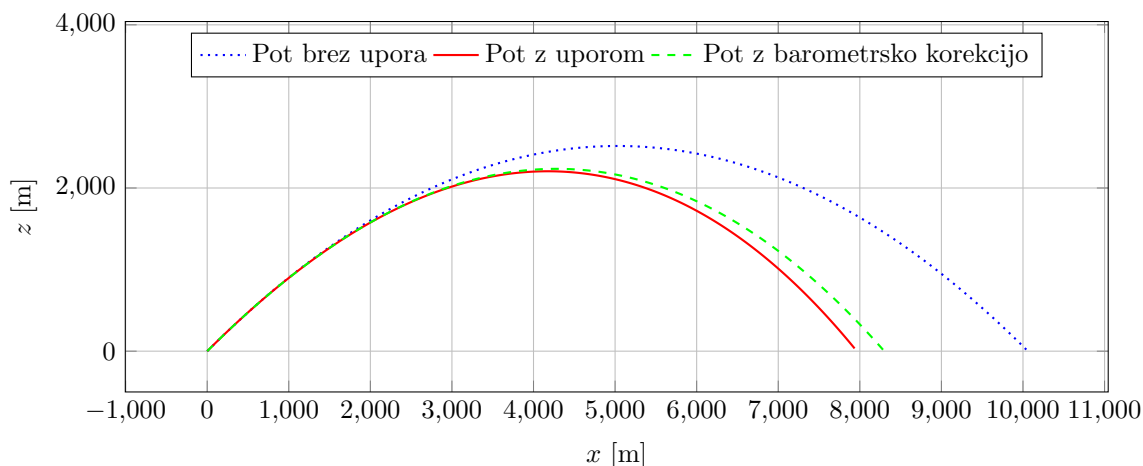
$$F(x, z, \theta) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} F(x, z, \theta) = 0. \quad (17)$$

Program je ovojnico izračunal, tako da je za vsakega od celostopinjskih kotov θ med 43° in 90° izračunal naslednje. Simuliral je pot izstrelka pod kotom θ in pod kotom $\theta + 0,1^\circ$. Pogledal je razliko v z koordinatah za vse različne x . Drugi del enačbe (17) nam pove, da mora veljati $F(x, z, \theta + d\theta) - F(x, z, \theta) = 0$. To se bo zgodilo pri tistem x , ko je razlika med višinama poti za dva zelo podobna izstrelitvena kota enaka nič. Torej, program poišče tak x in njemu ustrezen z (vseeno za katero od dveh poti, saj sta z vrednosti v tej točki po definiciji enaki). Dobljena točka (x, z) leži na ovojnicu, zato jo program shrani v tabelo. Te točke poišče za različne kote izstrelitve in na tak način sestavi ovojnico. Ker nas zanima samo ovojnica pri $z > 0$, nam bodo pomagali samo koti, večji kota z maksimalnim dosegom.

Trenutno nam ovojnica ne pove kaj dosti, razen tega, da je približno oblike $a - kx^2$ (kakor je v primeru brez upora), in da je območje dosega bistveno manjše z uporom.

3.2 Barometrsko korekcija

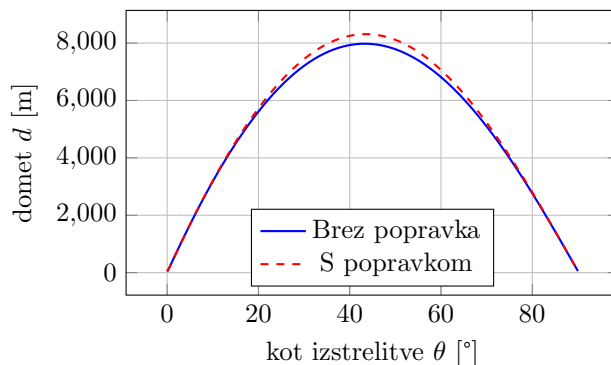
Poglejmo, kako se rezultati spremenijo, če upoštevamo barometrsko enačbo. V tem delu bomo uporabili $\lambda = (8200 \text{ m})^{-1}$. Če na graf 2 dorišemo še pot izstrelka pri upoštevanju upora in barometrske enačbe (6), dobimo sliko 5. Na njej lahko opazimo, da je domet s korekcijo daljši za 348 m. To je smiselno, saj je v višinah manjša gostota zraka, zato je upora manj. Dobro je tudi, da je krivulja z barometrsko korekcijo še vedno pod krivuljo poti brez upora.



Slika 5: Pot izstrelka, izstreljenega pod kotom 45° glede na vodoravnico v smeri x , brez, z uporom in z barometriskim popravkom

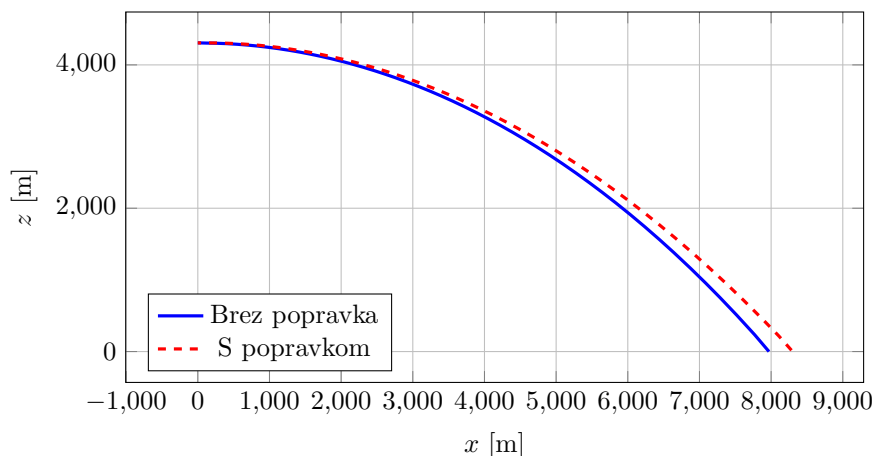
Ali se z upoštevanjem barometrske enačbe kaj spremeni optimalni kot meta? S slike 6 je težko razbrati, vendar je odgovor pritrdilen. Nov optimalen kot je enak $\theta_{\max} = 43,7^\circ$ (pri tem doseže 8316 m), kar je za $0,4^\circ$ več kot brez korekcije. Razlika je majhna, vendar večja od napake simulacije. Razlog za to, da je kot nekoliko večji, leži verjetno v tem, da je višje manj upora in z večanjem kota se doseže večjo višino. Na grafu 6 lahko opazimo tudi, da je domet pri srednjih kotih s popravkom nekoliko večji, pri velikih in pri majhnih kotih pa ni. Pri majhnih kotih izstrelak tako ali tako ne doseže velike višine, zato v tem primeru barometrska enačba bistveno ne spremeni situacije. Pri velikih kotih pa ima v višinah precej majhno hitrost in posledično manjši upor, zato ima barometriški popravek manj vpliva.

Morda najzanimivejše vprašanje pa je, kako se spremeni območje dosega izstrelka, če upoštevamo popravek. Obe ovojnici (z in brez popravka) prikazuje slika 7. Pri tem lahko opazimo dve stvari. Prvič, z upoštevanjem popravka je območje dosega za odtenek večje, medtem ko, drugič, je najvišja možna višina v obeh primerih zelo podobna (okrog 4307 m). Prvo je precej očitno in že videno, drugo pa je zelo presenetljivo. Največja višina pri metu pod kotom 90° v obeh primerih je tako podobna, da je razlika manjša od napake simulacije. To lahko razložimo na sledeč način. Na začetku, ko sta hitrost in upor



Slika 6: Graf prikazuje razliko med dometo brez in z upoštevanjem barometrične enačbe za različne kote

velika, je izstrelak še blizu tlom, zato je gostota zelo podobna ρ_0 . Ko pride na dovoljšnjo višino, da bi se lahko sprememba gostote poznala, pa ima že tako majhno hitrost, da so vplivi sile upora bistveno manjši. V najvišji točki je hitrost nič in tam ni upora, tako da manjša gostota zelo malo vpliva na pot. Ta primer je popolnoma drugačen od meta pod kotom 45° , saj ima takrat izstrelak v najvišji točki veliko hitrosti v x smeri, torej se manjša gostota dosti bolj pozna.



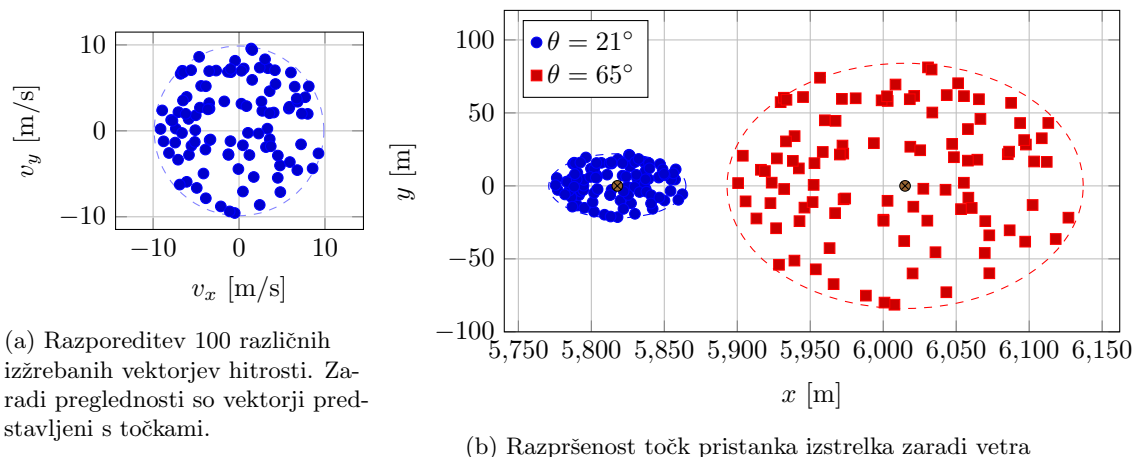
Slika 7: Ovojnica izstrelka z uporabo brez barometričnega popravka in z njim

4 Analiza vpliva prečnega vetra

V tem delu se bomo spraševali, kako prečni veter vpliva na točko pristanka izstrelka. Simulacije so bile izvedene za veliko različnih vetrov, ki so pihali v ravnini xy (torej brez z komponente) povsod enakomerno. Za vsako simulacijo je program izžrebal naključno velikost (v_v) in smer (α) vetra, tako da so vektorji porazdeljeni enakomerno v ravnini. Omejitev za največjo velikost hitrosti vetra je bila $c_0 = 9,8696 \text{ m/s} \approx \pi^2 \text{ m/s}$. Programsko je bilo to doseženo tako, da se je za kot žrebala (psevdo)naključna številka na intervalu $[0, 2\pi)$, velikost hitrosti pa je bila koren iz (psevdo)naključne številke z intervala $[0, c_0^2)$. Porazdelitev 100 različnih izžrebanih vektorjev je predstavljena na sliki 8a. Izberemo dva različna kota, za katera v brezvetrju izstrelak pade na podobno mesto: $\theta_1 = 21^\circ$ ($d = 5818 \text{ m}$) in $\theta_2 = 65^\circ$ ($d = 6015 \text{ m}$). Izžreban vektor vetra ima torej obliko $\mathbf{v}_v = (v_v \cos \alpha, v_v \sin \alpha, 0)$, kjer je $\alpha \in [0, 2\pi)$ in $v_v \in [0, c_0)$. V tem delu ni bila upoštevana barometrična enačba, torej $\lambda = 0$.

4.1 Kvalitativna analiza

Graf 8b prikazuje, kako vetrovi z grafa 8a vplivajo na točke pristanka pri obeh kotih. Opazimo lahko nekaj zanimivih lastnosti. Razpršenost pri kotu 21° je mnogo manjša od razpršenosti pri kotu 65° . Tega ne smemo pripisati temu, da sta točki pristanka pri dveh kotih drugačni – relativna razlika oddaljenosti



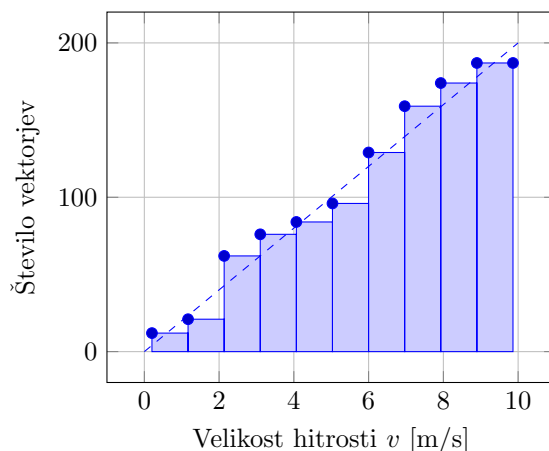
Slika 8: Grafa prikazujeta, kako različni vetrovi (a) vplivajo na točke pristanka (b) za dva različna izstrelitvena kota, 21° in 65° . Čeprav bi v brezvetrju pri obeh kotih izstrelka pristala na zelo podobnem mestu (črni piki), je razpršenost zaradi vetra bistveno večja pri metu pod kotom 65° .

točke pristanka je 3%, razlika v razpršenosti pa 50%. Razlog za to razliko je v različni dolžini poti. Izstrelak pod kotom 21° do pristanka opravi mnogo krajšo pot kot drugi, zato je vpliv sile upora manjši, posledično pa se tudi veter manj pozna. Pri kotu 65° pa je ravno obratno – daljša pot, večji vpliv vetra. Kvalitativno lahko opazimo, da je v obeh primerih razpršenost v smeri x dosti večja od razpršenosti v smeri y . Razlog za to je, da v smeri, v kateri je več hitrosti, deluje več upora. V x smeri, kamor ima izstrelak večino hitrosti, deluje več upora, zato se spremembe v vetru bolj poznajo kot v y smeri, kjer izstrelak skoraj nima hitrosti.

Zaradi preglednosti je na grafih 8 prikazanih samo sto različnih simulacij za vsak kot. Za podrobnejšo analizo je bilo simuliranih 1000 metov z različnimi vetrovi za vsakega od dveh izbranih kotov. Za lažjo razlago imenujmo točko, kjer bi izstrelak pristal, če ne bi bilo vetra, *brezvetrna točka*.

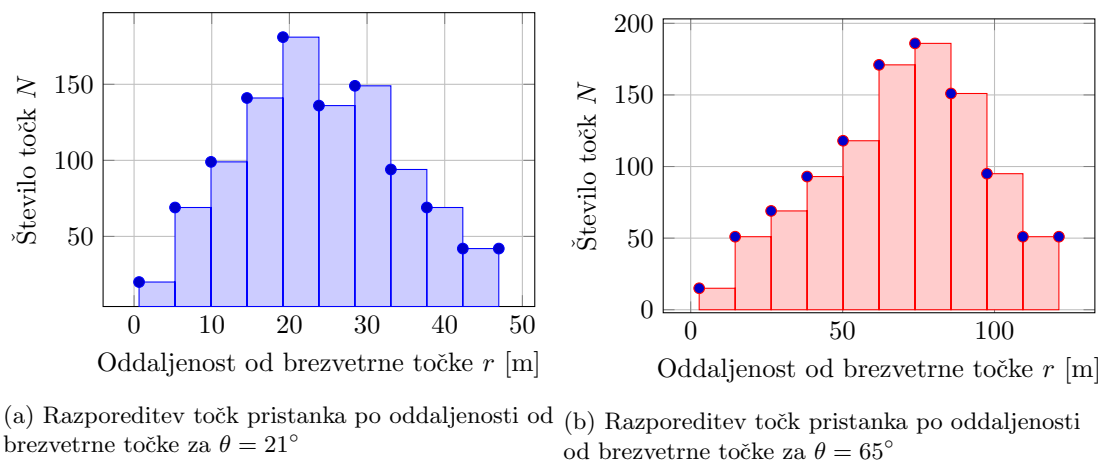
4.2 Analiza oddaljenosti od brezvetrne točke

Da preverimo, če so bili vektorji hitrosti vetra izžrebanii zares enakomerno po ravnini, si pogledjmo distribucijo velikosti vektorjev (slika 9). Dobiti bi morali verjetnostno porazdelitev, ki linearno narašča od 0 m/s do 9,8 m/s, kar je na sliki 9 prikazano s črtkano črto. Opazno je dobro ujemanje s teorijo, torej je bil način žrebanja uspešen, prav tako pa je bilo uporabljeno dovolj vzorcev, da je naključna napaka relativno majhna.



Slika 9: Razporeditev vektorjev hitrosti vetra po njihovi velikosti. Ta se zelo ujema s teoretično razporeditvijo $20x$, narisano s črtkano črto.

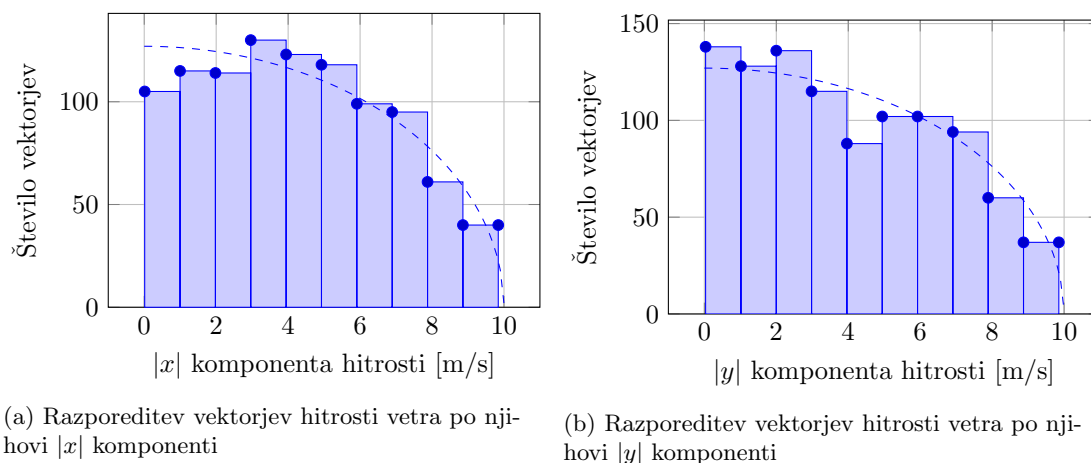
Poglejmo si, ali oddaljenost točk pristanka od brezvetrne točke ohranja takšno porazdelitev. Z slike 10 lahko sklepamo, da ne. Najprej lahko ugotovimo, da je povprečna oddaljenost točke pristanka od brezvetrne točke pri kotu $\theta = 21^\circ$ ($\bar{r} = (24,1 \pm 0,3)$ m) manjša kot pri kotu $\theta = 65^\circ$ ($\bar{r} = (70,1 \pm 0,8)$ m). To smo razložili že ob analizi grafa 8. Standardna odklona sta $\sigma_{21^\circ} = 10,1$ m in $\sigma_{65^\circ} = 25,6$ m. Očitna je tudi razlika v poševnosti: $\gamma_{21^\circ} = 0,09$ in $\gamma_{21^\circ} = -0,34$. To nam pove, da graf 10b zagotovo ne more predstavljati Gaussove porazdelitve, medtem ko bi jo graf 10a lahko. Vseeno pa nimamo razloga da bi verjeli, da katerikoli od njiju predstavlja Gaussovo porazdelitev, kvečjemu nas čudi dejstvo, da razporeditev ni v nobenem primeru podobna tisti z grafa 9. To si lahko razlagamo s pomočjo prikaza 8b, ki nam da misliti, da je morda pametneje gledati po vsaki komponenti posebej. Če ima v_x večji vpliv kot v_y in se distribucija ohranja po komponentah, sta morda grafa 10 ravno takšna, kot bi pričakovali. Preden se lotimo analize vsake komponente posebej, pa še omenimo, da je vrh grafa 10a levo od povprečja, medtem ko je vrh grafa 10b desno od povprečja.



Slika 10: Pri razporeditvah oddaljenosti od brezvetrne točke lahko opazimo podobno obliko za oba kota, vendar tudi nekaj razlik.

4.3 Analiza oddaljenosti v x in y smeri

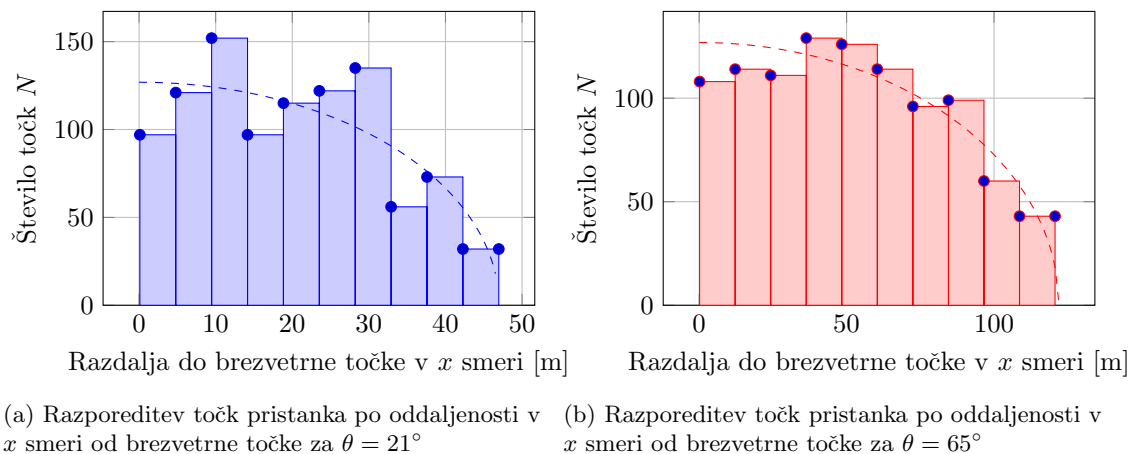
Najprej si pogledjmo kako, kako sta razporejeni komponenti $|v_x|$ in $|v_y|$. Zanimajo nas samo absolutne vrednosti, saj imamo zelo simetrično situacijo. Razporeditev po x in y komponentah bi morala biti enaka in slediti verjetnostni porazdelitvi $\frac{4}{10\pi}\sqrt{100-x^2}$. Kot lahko vidimo s histogramov 11, je ujemanje precejšnje, ne pa popolno.



Slika 11: Histograma porazdelitve x in y velikosti hitrosti vetra. Rezultati se precej ujema s pričakovano porazdelitvijo oblike $400/\pi \cdot \sqrt{100-x^2}$, ki je narisana s črtkano črto.

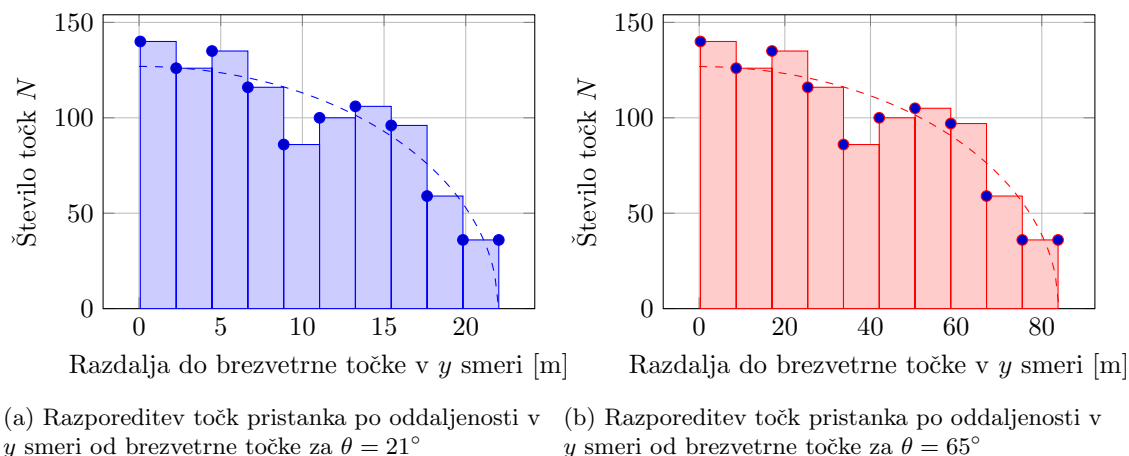
Poglejmo si najprej oddaljenost v x smeri. Porazdelitev za kot 65° se dosti bolje približa porazdelitvi

vetra, kakor porazdelitev za kot 21° (sliki 12a in 12b). Na vsakem od teh grafov je tudi narisana črtkana krivulja, kateri bi sledil histogram, če bi bila x komponenta hitrosti in oddaljenost končne točke od brezvetrne točke v x smeri linearno sorazmerne. Pri histogramu 12b gre za precejšnje ujemanje, pri 12a pa ne tako zelo. Razlog je spet v tem, da izstrelek pri kotu 65° opravi daljšo pot in ima veter večji vpliv, v primeru kota 21° pa so drugi faktorji bolj pomembni. Četudi je ujemanje precej slabo, pa lahko na histogramu 12a vseeno opazimo nek splošen trend navzdol. Če pa primerjamo histograma 12b in 11a pa ugotovimo, da sta skoraj popolnoma korelirana, kar je precej presenetljivo.



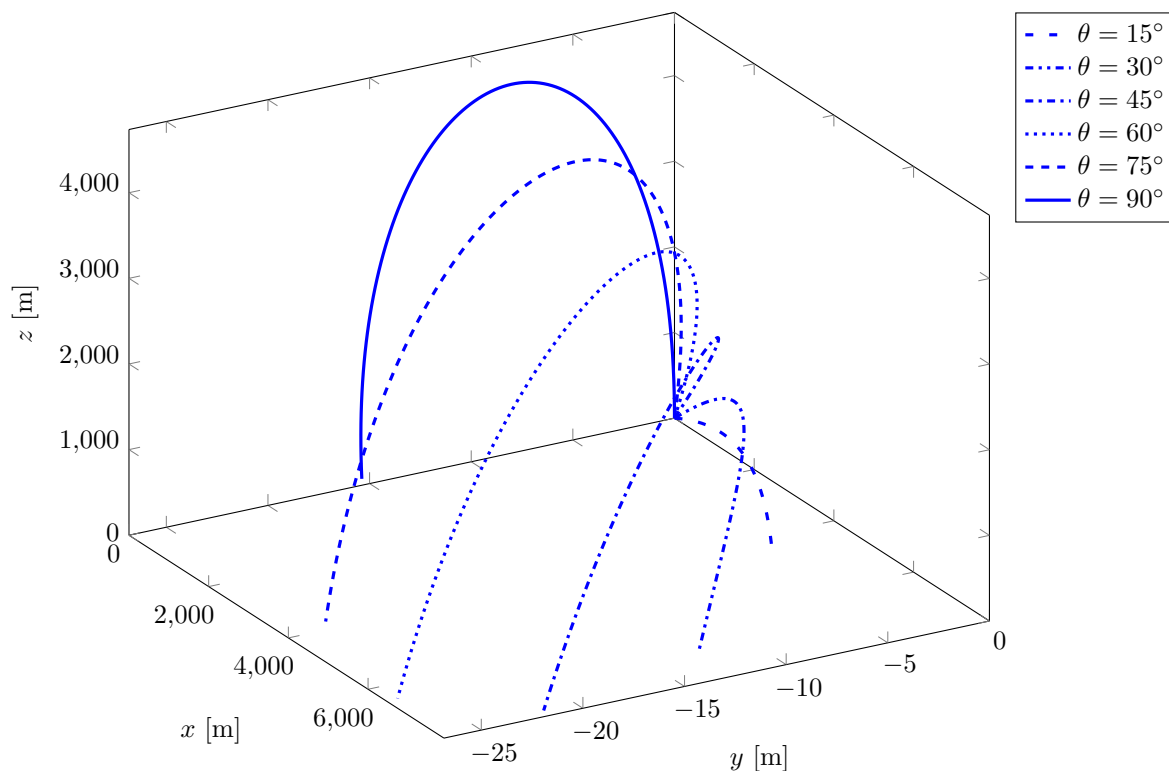
Slika 12: Histograma porazdelitev oddaljenosti točk od brezvetrne točke v x smeri za oba kota.

Če si ogledamo porazdelitev oddaljenosti v y smeri, pa pridemo do še bolj zanimivih ugotovitev (slika 13). Ne samo da se oba histograma dokaj dobro ujemata s črtkano krivuljo (torej pričakovano porazdelitvijo v primeru linearne odvisnosti z y komponento vetra), in da se zelo dobro ujemata z dejansko porazdelitvijo hitrosti iz simulacij (slika 11b), ampak sta – izredno presenetljivo – skoraj na las enaka drug drugemu (za nek linearen faktor). Drugače povedano, razdalja v y smeri od brezvetrne točke je *premo sorazmerna* z komponento vetra v y smeri. Po dobrem razmisleku je ta ugotovitev logična, vendar je dosti bolj subtilna, kot se zdi na prvi pogled. Namreč, faktor sorazmernosti je odvisen od dolžine poti, ki jo izstrelek med letom prepotuje, torej sorazmernost velja samo za dovolj majhne vetrove, da se zaradi vetra dolžina poti ne spremeni bistveno. Sila, ki kaže v y smeri, ima velikost $F_y = \frac{1}{2}\rho S|\mathbf{v}_{\text{rel}}|v_{v,y}$. Dokler bo trajektorija enaka, bosta prepotovana pot s in $|\mathbf{v}_{\text{rel}}|$ skozi čas leta zelo podobna, zato bo odmik, katerega drugi odvod je $\Delta\ddot{y} = \frac{1}{m}F_y$, zares ostal premo sorazmeren s F_y in posledično z v_y .



Slika 13: Čeprav se morda na prvi pogled ne zdi, sta na histogramih predstavljeni porazdelitvi oddaljenosti točk od brezvetrne točke za dva zelo različna kota.

Sedaj lahko tudi potrdimo, da so porazdelitve na histogramih 10 smiselne. Če predpostavimo, da velja



Slika 14: Prikaz poti izstrelka pod vplivom kvadratnega upora in Coriolisove sile, izstreljenega pod različnimi koti. Barometriška enačba ni upoštevana. *Pozor:* osi niso v merilu; odmiki v y smer zaradi Coriolisove sile so močno manjši, kot so prikazani na grafu. Animacija je dostopna med priponkami, nosi ime `coriolis.pdf`, ali pa s klikom na [to povezavo](#).

$\Delta x = k_1 v_x$ in $\delta y = k_2 v_y$, potem je $\Delta r = \sqrt{k_1^2 v_x^2 + k_2^2 v_y^2}$. k_1 in k_2 si lahko predstavljamo kot veliko in malo polos elipse, ki objema gručo točk na sliki 8b, deljeni s c_0 . To je tudi pojasnilo, zakaj grafa 10a in 10b nista enake oblike – elipsa, ki objema modro gručo na sliki 8b, ima drugačno ekscentričnost kot elipsa, ki objema rdečo gručo. Za zaključek tega dela še ocenimo polos elips na sliki 8b in vrednosti koeficientov k_1 in k_2 za oba kota. Vrednosti so zbrane v tabeli 1.

θ	21°	65°
k_1	4,8	12,4
k_2	2,2	8,5
velika polos [m]	47	122
mala polos [m]	22	84

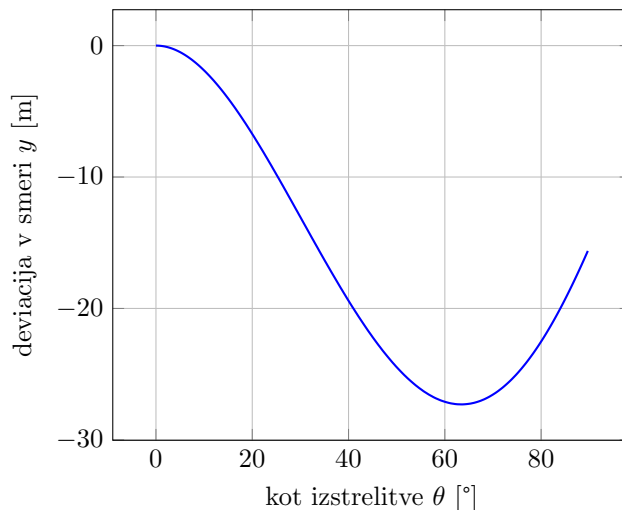
Tabela 1: Zbrane vrednosti koeficientov k_1 in k_2 ter polos elips s slike 8b

5 Analiza vpliva Coriolisove sile

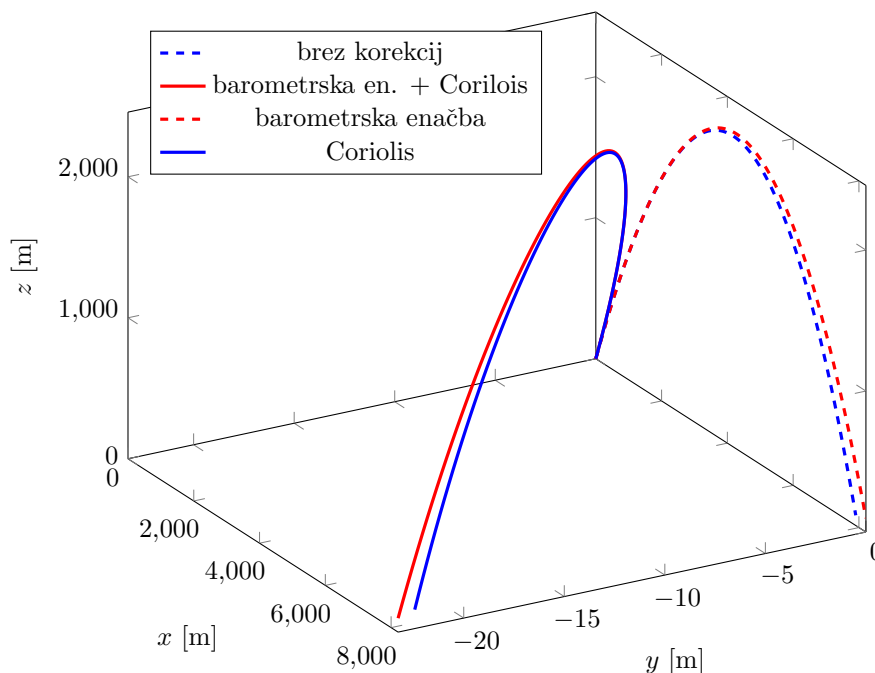
Pa si pogledjmo, kako situacijo spremeni Coriolisova sila. V tem delu bomo upoštevali, da velja $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$, kjer je $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ krožna frekvenca Zemlje in $\varphi = 46,042^\circ$ geografska širina Peterlinovega paviljona. Na sliki 14 lahko opazimo, da vse izstrelke zanese v smeri proti $-y$, torej proti zahodu. To je pričakovano, saj je znano, da na severni polobli sviri zavijajo na desno. Opaziti je tudi, da je največji odklik v y smeri zaznati pri nekem srednjem izstrelitvenem kotu. Paziti pa moramo, da nas graf ne zavede; osi namreč niso merilu, zato so efekti Coriolisove sile prikazani pretirano.

Osredotočimo se na eno od zgornjih ugotovitev: največji odklik v y smeri doseže izstreljek pri nekem srednjem kotu. katerem? Na sliki 15 je prikazana odvisnost odklika od kota izstrelitve. Največji odklik

se zgodi pri kotu $\theta_{\max} = 63,6^\circ$. Pri majhnih kotih je pot izstrelka krajša, zato Coriolisova sila izstrelka ne more premakniti veliko. Pri večjih kotih pa je smer hitrosti manj pravokotna na ω , zato je Coriolisova sila manjša. Še vedno so vsi premiki zelo majhni, celo desetkrat manjši od barometrične korekcije. Je pa res, da bi brez te korekcije lahko zgrešili nasprotnikovo ladjo.



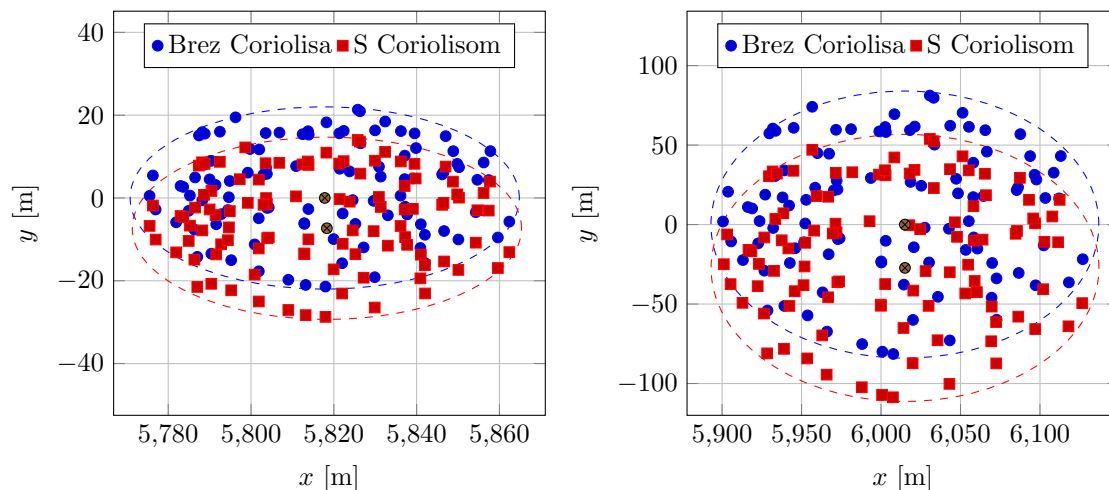
Slika 15: Graf prikazuje kako se spreminja zamik točke pristanka izstrelka v y smeri zaradi Coriolisove sile ob upoštevanju kvadratnega zakona upora za različne kote izstrelitve pri konstantni izstrelitveni hitrosti. Barometrična enačba ni upoštevana.



Slika 16: Prikaz vseh štirih poti z različnimi približki popravkov. Vse so krivulje izstrelka, izstreljenega pod kotom 45° v smeri x . *Pozor*: osi niso v merilu. Animacija je dostopna med priponkami, nosi ime `priblizki.pdf`, ali pa s klikom na [to povezavo](#).

Na sliki 16 so predstavljene štiri krivulje leta izstrelka, izstreljenega pod kotom 45° : brez vseh popravkov, z barometričnim popravkom, s Coriolisovim popravkom in z obema. Graf je spet nekoliko zavedljiv, saj daje misliti, da je Coriolisov popravek mnogo večji od barometričnega – resnica je ravno obratna.

Za konec pa še pogledjmo, kako se raztresenost ciljnih točk zaradi vetra spremeni, ko dodamo Coriolisovo silo. Z obeh grafov pri sliki 17 je razvidno, da se razpršenost vidno ne spremeni, le brezvetrna točka se nekoliko prestavi. Po pričakovanjih se pri kotu 65° prestavi za več ($\Delta y = 27,3\text{ m}$), kot pri kotu 21° ($\Delta y = 7,3\text{ m}$). Premiki brezvetrne točke v x smeri so znotraj napak simulacije.



(a) Razpršenost točk pristanka izstrelka zaradi vetra pri kotu 21° z in brez upoštevanja Coriolisove sile

(b) Razpršenost točk pristanka izstrelka zaradi vetra pri kotu 65° z in brez upoštevanja Coriolisove sile

Slika 17: Grafa prikazujeta, kako Coriolisova sila vpliva na pristanke izstrelka v vetru. *Pozor:* merila na grafih nista enaka, razpršenost na grafu a je manjša od razpršenosti na grafu b.

6 Zaključek

Pri tem projektu smo prišli do kar nekaj ugotovitev v zvezi s gibanjem izstrelka. Od vseh preučevanih vplivov je bil daleč najpomembnejši upor zraka, ki je skrajšal domet za približno 2000 m pri izstrelitvenem kotu 45° . Drugi najpomembnejši dejavnik je upoštevanje nehomogenosti atmosfere oziroma uporaba barometrične enačbe. Ta pri majhnih in velikih kotih ni tako pomemben, vendar pri kotu 45° prispeva popravek približno 300 m. Najmanj pomemben izmed preučevanih efektov je bil Coriolisova sila. Ta prispeva popravek ne več kot 30 m. Veter tudi prinese nekaj popravka, ki pa je prav tako odvisen od izstrelitvenega kota. Popravek zaradi vetra v x smeri je premo sorazmeren z x komponento vetra in popravek v y smeri je premo sorazmeren z y komponento vetra. Koeficienta sorazmernosti nista enaka za obe smeri, niti njuno razmerje ne ostaja enako za različne kote. Morda bi bilo vredno pogledati, kaj prinesejo še kateri drugi efekti. Če smo že upoštevali Coriolisovo silo, bi lahko tudi centrifugalno, ki bi predvidoma prinesla podoben popravek, vendar v x smeri. Zanimivo pa bi bilo razmisliti še o vrtenju izstrelka in Magnusovem efektu. Vseeno to poročilo obdela glavne dejavnike in z natančnostjo nekaj 10 m predvidi, kam bi izstrelk zares padel.