Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Fizikalni praktikum I

Poročilo

Vaja 32: Sklopljeno nihalo

Simon Bukovšek

Datum vaje: 8. november 2021
Datum oddaje poročila: 6.december 2021

1 Teoretični uvod

Imamo dve identični nihali z vstrajnostnima momentoma J, masama m in razdaljama od osi nihanja do težišča d_0, ki sta na razdalji d od osi vpeta z vzmetjo s koeficientom k. Če predpostavimo majne odmike, lahko enačbe gibana zapišemo na sledeč način:

$$J\ddot{\theta}_1 = -mgd'\theta_1 - kd^2(\theta_1 - \theta_2);$$
$$J\ddot{\theta}_2 = -mgd'\theta_2 - kd^2(\theta_2 - \theta_1).$$

Označimo sedaj sledeči dve količini: $D = mgd_0$ in $D' = kd^2$. To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$J\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(D+D') & D'\\ D' & -(D+D')\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}.$$

Kot je običajno pri nihanju, poskusimo najti rešitev oblike $\theta(t) = Ae^{i\omega t}$, kjer je A kompleksna amplituda in ω frekvenca nihanja. Za lastno nihanje sistema bo veljalo, da obe nihali nihata z enako frekvenco. To pomeni, da lahko za rešitev vstavimo enačbo $\theta_1 = A_1e^{i\omega t}$ in $\theta_2 = A_2e^{i\omega t}$. Druga odvoda teh dveh funkcij sta kar funkciji pomnoženi z $-\omega^2$. Eksponentni del se pokrajša in dobimo sledečo enačbo: v matrični obliki:

$$-J\omega^2\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(D+D') & D'\\ D' & -(D+D')\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}.$$

To lahko zapišemo tudi nekoliko drugače, tako da je na levi strani vektor nič.

$$0 = \begin{bmatrix}-D' - (D - J\omega^2) & D'\\ D' & -D' - (D - J\omega^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$$

Ker A_1 in A_2 nista nič, mora biti determinanta leve matrike enaka nič. To lahko zapišemo tudi kot:

$$\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} - \frac{D - J\omega^2}{D'}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} = 0$$

To močno spominja na iskanje lastnih vrednosti leve matrike. Če označimo $\frac{D-J\omega^2}{D'}$ z λ, sledi:

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

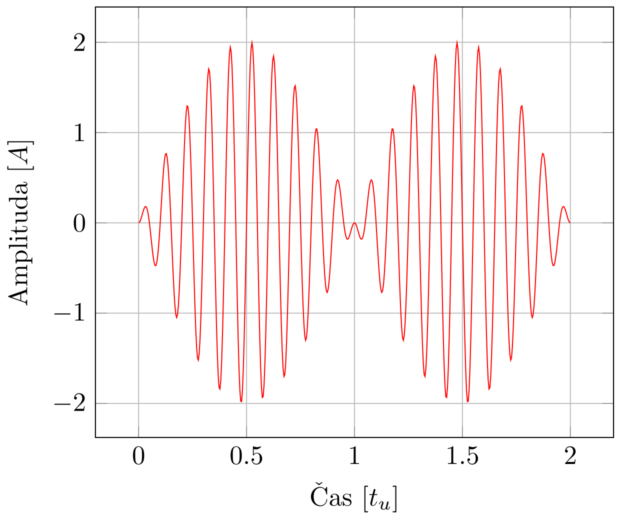
Zgornji izraz je ekvivalenten naslednjemu:

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = 0.$$

Torej je $\lambda_0 = 0$ in $\lambda_1 = -2$. Iz tega sledi, da je $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ in $\omega_1 = \sqrt{\frac{D+2D'}{J}}$. Hitro lahko preverimo, da ω_0 ustreza nihanju, ko oba nihala nihata z isto fazo in je vzmet ves čas neraztegnjena, medtem ko ω_1 ustreza nihanju, ko imata nihali ravno nasprotni fazi in središče vzmeti miruje. Fizika pravi, da je katerokoli nihanje sklopljenega nihala linearna kombinacija vseh lastnih nihanj. Če tako na primer na začetku odmaknemo eno nihalo iz ravnovesne lege za amplitudo A, drugega pa ne, se bo čez čas nihanje preneslo iz enega na drugo nihalo in spet nazaj. Enačbe pokažejo sledeče:

$$\theta_1(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right),$$
$$\theta_2(t) = 2A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2}t\right).$$

Pri tem je $\omega' = \frac{\omega_1+\omega_0}{2}$ krožna frekvenca, s katero nihalo niha, $\omega_u = \omega_1 - \omega_0$ pa frekvenca utripanja, s katero se energija prenaša z enega na drugo nihalo. Graf nihanja drugega od nihal ($\theta_2(t)$) je prikazan na Sliki 1.



Slika 1: Graf spreninjanja amlitude enega od nihal v sklopljenem nihalu

2 Pripomočki

- Dve enaki nihali
- Vzmet
- Milimetersko in kljunasto merilo
- Štoparica
- Uteži različnih mas

3 Meritve

Najprej je bil posebaj izmerjen nihajni čas vsakega nihala, da bi ob morebitnem neskladanju popravili obtežitev. Nato so bili po štirikrat izmerjeni nihajni časi t_0, t_1, t' in T. Izmerjene so bile vse mere nihala in raztezek vzmeti pri različnih obtežitvah.

4 Izmerjeni podatki

Izmerjeni časi so podani v Tabeli 1.

t_0 (30 nihajev)	t_1 (30 nihajev)	t' (15 nihajev)	T (4 nihaji)
$(55{,}35 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(53{,}63 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(27{,}30 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(281{,}52 \pm 0{,}50)\,\mathrm{s}$
$(55{,}17 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(53{,}91 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(27{,}08 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(282{,}06 \pm 0{,}50)\,\mathrm{s}$
$(55{,}32 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(54{,}00 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(27{,}09 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(282{,}56 \pm 0{,}50)\,\mathrm{s}$
$(55{,}19 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(53{,}76 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(27{,}03 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$	$(282{,}11 \pm 0{,}50)\,\mathrm{s}$

Tabela 1: Različni izmerjeni časi pri sklopljenem nihalu

Nihalo je sestavljeno iz dolge aluminijaste palice z dolžino a in polemrom r_a, na rzadalji b od osi nihanja pa je okoli palice tesno prilepljen medeneinast valj s polmerom r_v in višino h. Valj ima skozi sredino luknjo, skozi katero gre aluminijasta palica. Izmerjeni podatki so sledeči: $a = (97{,}4 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$, $r_a = (0{,}50 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$, $b = (83{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$, $r_v = (2{,}22 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$ in $h = (8{,}47 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}$. Pomemben podatek je tudi razdalja od osi do točke, kjer je vpeta vzmet: $d = (10{,}4 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$.

Raztegi vzmeti pri različnih obtežitvah so podani v Tabeli 2.

Masa obtežitve [g]	Raztezek vzmeti [cm]
50 ± 1	$2{,}1 \pm 0{,}2$
148 ± 1	$6{,}0 \pm 0{,}2$
296 ± 2	$11{,}8 \pm 0{,}2$

Tabela 2: Raztezki vzmeti pri različnih masah

5 Analiza podatkov

Najprej izračunamo povprečne nihajne čase in iz tega krožne frekvence. Negotovost pri teh vrednostih je kar standardni odklon meritev plus povprečna negotovost vseh meritev. Preračunani podatki so v Tabeli 3.

$t_0 = (1{,}842 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}$	$t_1 = (1{,}794 \pm 0{,}008)\,\mathrm{s}$	$t' = (1{,}808 \pm 0{,}014)\,\mathrm{s}$	$T = (70{,}52 \pm 0{,}22)\,\mathrm{s}$
$\omega_0 = (3{,}411 \pm 0{,}011)\,\mathrm{s}^{-1}$	$\omega_1 = (3{,}502 \pm 0{,}016)\,\mathrm{s}^{-1}$	$\omega' = (3{,}475 \pm 0{,}026)\,\mathrm{s}^{-1}$	$\omega_u = (0{,}0891 \pm 0{,}0003)\,\mathrm{s}^{-1}$

Tabela 3: Različni preračunani časi pri sklopljenem nihalu

Po teh meritvah je faktor sklopitve enak $K = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} = 0{,}026 \pm 0{,}001$.

Sedaj bomo vse zgoraj izmerjene čase še teoretično izračunali. Najprej moramo vedeti, kakšen je vztrajnostni moment nihala. To izračunamo s pomočjo vztrajnostnega momenta za valj z polmerom r in višino h okoli osi, pravokotne na osnovno ploskev skozi središče, ki je $J_{\mathrm{valj}} = \frac{1}{12} m \left(3r^2 + h^2\right) = \frac{\pi}{12} \rho r^2 h \left(3r^2 + h^2\right)$. Upoštevši to lahko izračunamo, da je vztrajnostni moment za naše nihalo enak:

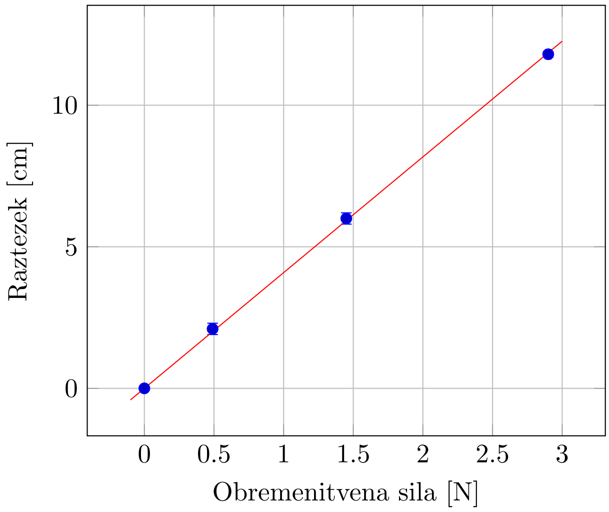
$$J_{\mathrm{nihalo}} = \rho_{\mathrm{Al}} \pi r_a^2 a \left(\frac{1}{4} r_a^2 + \frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{4} a^2\right) + \rho_{\mathrm{Me}} \pi h \left(r_v^2 - r_a^2\right) \left(\frac{1}{12} h^2 + \left(\frac{h}{2} + b\right)^2\right) - \frac{1}{4} \rho_{\mathrm{Me}} \pi h \left(r_v^4 - r_a^4\right).$$

Pri upoštevanju, da je $\rho_{\mathrm{Me}} = 8{,}73\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ in $\rho_{\mathrm{Al}} = 2{,}70\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, dobimo $J_{\mathrm{nihalo}} = (0{,}884 \pm 0{,}010)\,\mathrm{kg\,m^2}$. Izračunati moramo še vrednost D, ki je produkt mase nihala, razdalje do težišča in gravitacijskega pospeška. Slednje izračinamo na sledeč način:

$$D = g\left(\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{Al}}\pi r_a^2 a^2 + \rho_{\mathrm{Me}}\pi h\left(r_v^2 - r_a^2\right)\left(\frac{h}{2} + b\right)\right).$$

Ko vstvimo podatke dobimo $D = (10{,}3 \pm 0{,}2)\,\mathrm{N\,m}$.

Naslednja stvar, ki nam manjka je koeficient vzmeti. To naredimo z opazovanjem naklona premice, ki se prilega točkam na grafu raztezka v odvisnosti od sile (glej Sliko 2).



Slika 2: Graf raztezka vzmeti v odvisnosti od obremenitve

Naklonski koeficinet najbolj prilegajoče se linearne funkcije da koeficient vzmeti: $k = (0{,}245 \pm 0{,}001)\,\mathrm{N\,cm^{-1}} = (24{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Konstanto D' izračunamo po obrazcu $D' = kd^2 = (0{,}265 \pm 0{,}011)\,\mathrm{N\,m}$.

Sedaj lahko iz izmerjenih podatkov izračunamo nihajne čase sklopljenega nihala. Uporabne so sledeče enačbe:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}};\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}};\quad \omega' = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2};\quad \omega_u = \omega_1 - \omega_0.$$

Izračunane vrednosti krožnih frekvenc in nihajnih časov so skupaj z izmerjenimi podane v Tabelah 4 in 5.

	$\omega_0\,[\mathrm{s^{-1}}]$	$\omega_1\,[\mathrm{s^{-1}}]$	$\omega'\,[\mathrm{s^{-1}}]$	$\omega_u\,[\mathrm{s^{-1}}]$
Izmerjene	$3{,}411 \pm 0{,}011$	$3{,}502 \pm 0{,}016$	$3{,}475 \pm 0{,}026$	$0{,}0891 \pm 0{,}0003$
Izračunane	$3{,}413 \pm 0{,}061$	$3{,}500 \pm 0{,}064$	$3{,}456 \pm 0{,}063$	$0{,}0876 \pm 0{,}0125$

Tabela 4: Preračunane in izmerjene krožne frekvence sklopljenega nihala

	$t_0\ [\mathrm{s^{-1}}]$	$t_1\ [\mathrm{s^{-1}}]$	$t'\ [\mathrm{s^{-1}}]$	$T\ [\mathrm{s^{-1}}]$
Izmerjene	$1{,}842 \pm 0{,}006$	$1{,}794 \pm 0{,}008$	$1{,}808 \pm 0{,}014$	$70{,}52 \pm 0{,}22$
Izračunane	$1{,}841 \pm 0{,}027$	$1{,}795 \pm 0{,}032$	$1{,}818 \pm 0{,}030$	$72{,}22 \pm 9{,}45$

Tabela 5: Preračunani in izmerjeni nihajni časi sklopljenega nihala

Preračunan faktor sklopitve je enak: $K' = 0{,}025 \pm 0{,}002$, kar pa je znotraj napake izmerjene vrednosti.

Izmerjeni rezultati se zelo dobro ujemajo z izračunanimi, čeprav so v tem primeru izračunani manj natančni od izmerjenih. Kar je važno, je, da so izmerjeni podatki znotraj napake izračunanih.