



Fizikalni praktikum I

Poročilo

Vaja 31: Torzijsko nihalo

Simon Bukovšek

Datum vaje: 25. oktober 2021
Datum oddaje poročila: 8. november 2021

1 Teoretični uvod

Pri torzijskem nihanju niha utež na vijačni vzmeti. Utež ima vztrajnostni moment okoli središča nihanja J in vijačna vzmet ima koeficient D . Slednji je definiran kot razmerje med kotom odmika vijačne vzmeti in navorom, ki ga vzmet povzroči v nasprotno smer: $M = -D\varphi$. Drugi Newtonov zakon za kroženje se tako glasi:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi.$$

Zgornja enačba ima rešitev

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_0 e^{i\omega_0 t},$$

pri čemer je $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ in $\hat{\varphi}_0$ je začetna kompleksna amplituda odvisna od začetnih pogojev. Če k enačbi dodamo še navor trenja, ki je s faktorjem R sorazmeren z kotno hitrostjo, dobimo sledečo enačbo:

$$J\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + D\varphi = 0.$$

Zaradi lepšega zapisa v nadaljevanju to zapišemo kot:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

kjer je $\beta = \frac{R}{2J}$. Nastalo linearno homogeno diferencialno enačbo lahko rešimo po standardnem postopku z izračunom ničel karakterističnega polinoma. Rešitev je sledeča:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_0 e^{-\beta t} e^{i\omega_p t}.$$

Pri tem je $\hat{\varphi}_0$ spet začetna kompleksna amplituda odvisna od začetnih pogojev, ω_p pa je nova kotna frekvenca, ki se izrazi kot $\omega_p^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Z naslednjim korakom dodamo vsiljeno nihanje s frekvenco ω . V enačbi se to pozna tako, da je vsota navorov enaka nihanju s frekvenco ω :

$$J\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 e^{i\omega t}.$$

Naj spomnim, da ω ni nujno ista kot ω_0 . Zaradi poenostavitve v nadaljnjem zapisu spet celotono enačbo delimo z J in označimo $\frac{M_0}{J}$ z A_0 :

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = A_0e^{i\omega t}.$$

Nastalo diferencialno enačbo rešimo z nastavkom $\hat{B}e^{i\omega t}$. To pomeni, da bo nihalo nihalo z vsiljeno frekvenco, vendar z določeno amplitudo. Matematična rešitev bi bila vsota rešitve homogene enačbe in specifične rešitve, vendar zaradi eksponentnega faktorja prva rešitev hitro pade na nič in ostane samo še specifična rešitev. Označimo še amplitudo vzvoda, ki vsiljuje nihanje, z $B_0 = \frac{M_0}{D} = \frac{A_0}{\omega_0^2}$. Izračun pokaže sledeče:

$$\hat{B} = \frac{B_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}.$$

To pomeni, da je amplituda nihanja enaka:

$$B = \frac{B_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

in fazna razlika med vsiljenim in torzijskim nihanjem enaka:

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

2 Pripomočki

- Torzijsko nihalo z možnostjo spreminjanja med dvema različnima koeficientoma dušenja.
- Elektromotor z vzvodom, ki proizvaja sinusno nihanje s prilagodljivo frekvenco.
- Štoparica.

3 Meritve

Najprej je bila izmerjena amplituda vzvoda, ki vsiljuje nihanje. Ostale meritve so bile narejene za dve različni dušenji torzijskega nihala: malo dušeno in močno dušeno. Vsakič je bil najprej izmerjen nihajni čas za pet nihajev ter amplituda na začetku ter po enem nihaju. Nato so bile izmerjene amplitude za vsiljeno nihanje med 0,20 Hz do 0,60 Hz s presledki 0,05 Hz, med 0,35 Hz in 0,40 Hz pa je bila amplituda merjena na 0,01 Hz.

4 Izmerjeni podatki

Ker so bile na nihalu označene zareze na $7,5^\circ$, bo to v tem poročilu vrednost ene enote. Amplituda vzvoda je bila izmerjena na $0,8 \pm 0,1$ enote. Tabela 1 podaja izmerjen čas petih nihajev ($5t_0$), začetno amplitudo (A_0) in amplitudo po enem nihaju (A_1).

količina	malo dušenja	močno dušenje
$5t_0$ [s]	$13,04 \pm 0,10$	$13,08 \pm 0,10$
A_0 [enote]	$15,0 \pm 0,3$	$15,0 \pm 0,3$
A_1 [enote]	$10,2 \pm 0,3$	$12,4 \pm 0,3$

Tabela 1: Zgoraj naštetje izmerjene količine za obe dušenji

V Tabeli 2 pa so izmerjene amplitude vsiljenega nihanja za obe dušenji.

Fazni zamik je bil pri nekaterih frekvencah grobo ocenjen. Za močno dušenje je bil pri 0,35 Hz približno 90° , pri 0,38 Hz približno 180° in pri 0,50 Hz približno 270° . Pri manjšem dušenju je bil pri 0,25 Hz približno 90° , pri 0,36 Hz približno 135° , pri 0,38 Hz približno 180° in pri 0,50 Hz približno 315° .

Vsiljena kotna ferkvenca (ω [Hz])	Amplituda vsiljenega nihanja pri majhnem dušenju (B_1 [enote])	Amplituda vsiljenega nihanja pri močnem dušenju (B_2 [enote])
0,20 Hz	$1,0 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
0,25 Hz	$1,0 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
0,30 Hz	$1,1 \pm 0,1$	$1,4 \pm 0,1$
0,35 Hz	$1,6 \pm 0,1$	$2,0 \pm 0,1$
0,36 Hz	$1,6 \pm 0,1$	$2,6 \pm 0,1$
0,37 Hz	$2,0 \pm 0,1$	$4,7 \pm 0,1$
0,38 Hz	$2,1 \pm 0,1$	$5,0 \pm 0,1$
0,39 Hz	$2,0 \pm 0,1$	$3,3 \pm 0,1$
0,40 Hz	$2,0 \pm 0,1$	$2,7 \pm 0,1$
0,45 Hz	$1,4 \pm 0,1$	$1,7 \pm 0,1$
0,50 Hz	$1,2 \pm 0,1$	$1,5 \pm 0,1$
0,55 Hz	$0,7 \pm 0,1$	
0,60 Hz	$0,5 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$
0,65 Hz	$0,45 \pm 0,10$	
0,70 Hz	$0,35 \pm 0,10$	
0,75 Hz	$0,3 \pm 0,1$	

Tabela 2: Amplitude vsiljenega nihanja za različne vsiljene frekvence

5 Analiza podatkov

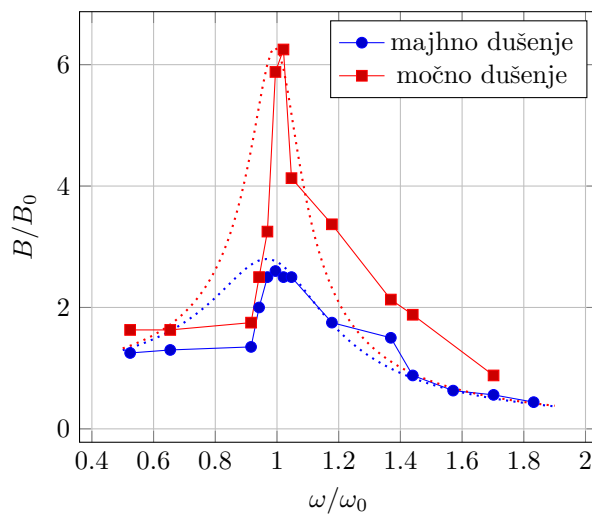
Najprej izračunamo krožno frekvenco ω_p za obe nihanji po obrazcu $\omega_p = \frac{2\pi}{t_0}$. Pri močno dušenem nihanju dobimo $\omega_{p,2} = (2,40 \pm 0,12) s^{-1}$ in za manj dušeno nihanje dobimo $\omega_{p,1} = (2,40 \pm 0,12) s^{-1}$. Faktor dušenja β dobimo po enačbi $\beta = \frac{\omega_p}{2\pi} \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)$. Za močno dušeno nihanje dobimo $\beta_2 = (0,147 \pm 0,007) s^{-1}$, za manj dušeno pa $\beta_1 = (0,073 \pm 0,003) s^{-1}$. Lastno nihajno frekvenco nedušenega nihala dobimo po enačbi $\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 + \beta^2}$. Za močno dušeno nihanje dobimo $\omega_{0,2} = (2,40 \pm 0,12) s^{-1}$, za manj dušeno pa $\omega_{0,1} = (2,40 \pm 0,12) s^{-1}$. Dušenje praktično ni spremenilo kotne frekvence in dobro je da sta rezultata za osnovno frekvenco pri obeh dušenjih enaka (saj gre za isto nihalo). Sedaj lahko zapišemo frekvence v enotah lastne frekvence nihala in odmike v enotah odmika vzvoda ter podatke izrišemo na grafu.

$\omega[\omega_0]$	$B[B_0]$ močno dušenje	$B[B_0]$ malo dušenja
$0,524 \pm 0,005$	$1,25 \pm 0,30$	$1,63 \pm 0,20$
$0,654 \pm 0,005$	$1,30 \pm 0,20$	$1,63 \pm 0,20$
$0,916 \pm 0,005$	$1,35 \pm 0,20$	$1,75 \pm 0,20$
$0,942 \pm 0,005$	$2,00 \pm 0,20$	$2,50 \pm 0,20$
$0,969 \pm 0,005$	$2,50 \pm 0,20$	$3,25 \pm 0,10$
$0,995 \pm 0,005$	$2,60 \pm 0,10$	$5,88 \pm 0,10$
$1,021 \pm 0,005$	$2,50 \pm 0,20$	$6,25 \pm 0,10$
$1,047 \pm 0,005$	$2,50 \pm 0,20$	$4,13 \pm 0,10$
$1,178 \pm 0,005$	$1,75 \pm 0,20$	$3,37 \pm 0,10$
$1,369 \pm 0,005$	$1,50 \pm 0,20$	$2,13 \pm 0,20$
$1,440 \pm 0,005$	$0,88 \pm 0,20$	$1,88 \pm 0,20$
$1,571 \pm 0,005$	$0,63 \pm 0,20$	
$1,702 \pm 0,005$	$0,56 \pm 0,20$	$0,88 \pm 0,20$
$1,832 \pm 0,005$	$0,44 \pm 0,20$	

Tabela 3: Preračunane frekvence in amplitude v relativne enote

Če poiščemo krivulji, ki se najbolj prilegata izmerjenim podatkom, pa dobimo vrednosti parametra a

Resonančna krivulja pri dveh različnih dušenjih



sledeče: $a_1 = 0.16$ in $a_2 = 0.35$, oziroma ($\beta = \frac{1}{2}a\omega_0$) $\beta_1 = 0,19\text{ s}^{-1}$ in $\beta_2 = 0,42\text{ s}^{-1}$, kar se od izmerjenih rezultatov razlikuje približno za faktor 4.

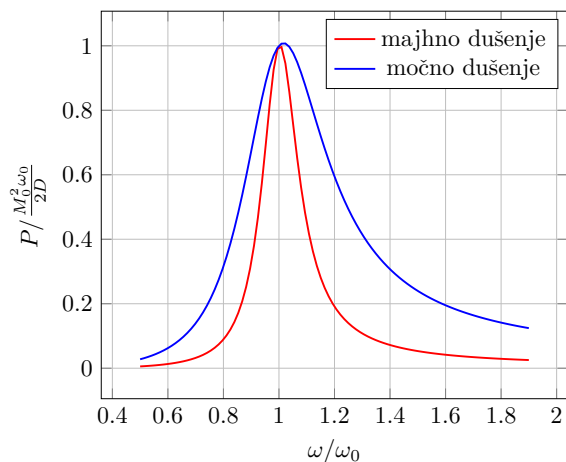
V spodnjih dveh grafih pa sta prikazana odvisnost faznega premika in dovajanja moči od vsiljene frekvence. V grafu za fazni premik, izračunanem po obrazcu

$$\delta = \arctan\left(\frac{a^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right),$$

so vnešeni še nekateri ocenjeni podatki. Krivulji za dovedeno moč sta izračunani po obrazcu:

$$P = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = \frac{1}{2}\omega M_0 B \sin(\delta) = \frac{M_0^2 \omega_0}{2D} \frac{a^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + a^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Moč, ki jo dovaja vsiljeno nihanje, v odvisnosti od krožne frekvence pri dveh različnih dušenjih



Fazni premik vsiljenega nihanja v odvisnosti od krožne frekvence pri dveh različnih dušenjih

