



Fizikalni praktikum I

Poročilo

Vaja 22: Viskoznost

Simon Bukovšek

Datum vaje: 11. oktober 2021

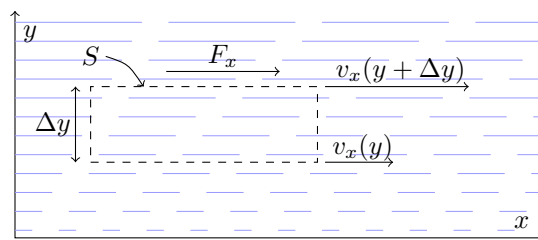
Datum oddaje poročila: 25. oktober 2021

1 Teoretični uvod

Viskoznost je razmerje med strižno napetostjo in strižno hitrostjo. V idealnih plinih ni strižnih sil, v vseh realnih snoveh pa so. Razmerje med strižno napetostjo in strižno hitrostjo opisuje naslednja enačba:

$$\frac{F_x}{S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Pri tem je F_x strižna sila, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ strižna hitrost in η viskoznost. Pomembno je, da je sila pravokotna na gradient hitrosti (glej sliko 1). Možen način za merjenje viskoznosti tekočine je uporaba koaksialnega



Slika 1: Prikaz strižne hitrosti

viskozometra. Pri tem se dva koaksialna valja s polmeroma r_a in r_b vrtita s kotnima hitrostima ω_a in ω_b , med njima pa je merjena snov, ki zaradi svoje viskoznosti ustvarja navor. Zgornjo enačbo lahko zapišemo v obliki, ki ustreza vrteči tekočini:

$$\frac{F_{\text{tan}}}{S} = \eta \frac{dv_{\text{tan}}}{dr} = \eta r \frac{d\omega}{dr}.$$

Navor ki ga viskoznost ustvarja je preprosto enak produktu strižne napetosti, polmera kroženja (r) in površine stika, ki je enaka površini valja s polmerom r (predpostavimo, da je višina merjenca med valjema enaka h):

$$M_t = \left(\eta r \frac{d\omega}{dr} \right) \cdot (2\pi r h) \cdot r = 2\pi \eta h r^3 \frac{d\omega}{dr}.$$

Nastalo diferencialno enačbo lahko zapišemo kot:

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3},$$

pri čemer je $A = \frac{2\pi\eta h}{M_t}$. Rešitev enačbe je:

$$\omega(r) = -\frac{A}{2r^2} + B,$$

pri čemer je B integracijska konstanta. Pri predpostavki, da se merjena tekočina pri stiku z valjem premika enako hitro kot valj, lahko postavimo pogoja $\omega(r_a) = \omega_a$ in $\omega(r_b) = \omega_b$. Iz tega dobimo konstanti kot:

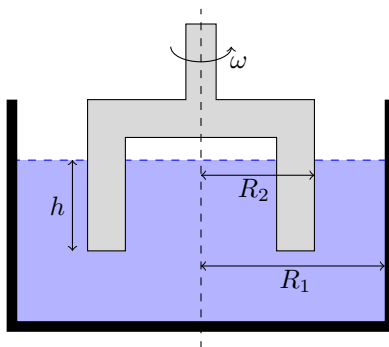
$$A = \frac{2r_a^2 r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} (\omega_b - \omega_a) \quad \text{in} \quad B = \frac{r_b^2 \omega_b - r_a^2 \omega_a}{r_b^2 - r_a^2}.$$

Iz izraza za A dobimo obrazec za navor:

$$M_t = 4\pi\eta h \frac{r_a^2 r_b^2}{r_b^2 - r_a^2} (\omega_b - \omega_a).$$

Če valj a (označimo njegov polmer z R_1) miruje in se valj b (označimo njegov polmer z R_2) vrti s kotno hitrostjo ω (glej sliko (2)), dobimo sledeč izraz:

$$M_t = -4\pi\eta\omega h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}.$$



Slika 2: Prikaz koaksialnega viskozimetra

Na os vrtečega notranjega valja navijemo vrstico na razdalji r_g okoli osi in nanjo obesimo utež z maso m . Ob predpostavki, da trenja ni in da utež ob padanju hitro doseže terminalno hitrost, lahko izmerimo slednjo in tako izračunamo viskoznost. Ko utež neha pospeševati, lahko zapišemo ravnovesje navorov kot:

$$m g r_g + (-k\eta\omega(\infty)) = 0.$$

Pri tem smo vse geometrijske člene združili v eno neznanko $k = 4\pi h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$.

$$\eta = \frac{m g r_g}{k\omega(\infty)} \quad (1)$$

Kljub vsemu pa mehansko trenje celotne priprave ni zanemarljivo in bi ga morali odšteti v prejšnji enačbi. Da bi ga lahko izmerili uporabimo dvojne različni mreitev. Najprej vzamemo notranji valj iz viskozne tekočine, odstranimo utež z vrvice, ga hitro zavrtimo in merimo kotni pojemek α_{zav} . Druga meritev je merjenje kotnega pospeška α_{pos} , ko utež pada in valj ni potopljen v viskozno snov. Zapišemo Newtonov zakon za krožno gibanje v obeh primerih in dobimo sledeče:

$$J\alpha_{zav} = -M_{tr},$$

$$(J + r_g^2 m) \alpha_{\text{pos}} = mgr_g - M_{\text{tr}}.$$

J je vztrajnostni moment celotnega sistema in ga ne poznamo. Lahko pa ga izrazimo iz prve enačbe in vstavimo v drugo ter izrazimo navor trenja:

$$M_{\text{tr}} = mr_g \frac{g - r_g \alpha_{\text{pos}}}{1 - \frac{\alpha_{\text{pos}}}{\alpha_{\text{zav}}}}. \quad (2)$$

Dobljeno trenje lahko vstavimo v obrazec za izračun viskoznosti, da dobimo popravljeno vrednost:

$$\eta = \frac{mgr_g - M_{\text{tr}}}{k\omega(\infty)}. \quad (3)$$

2 Pripomočki

- Koaksialni viskozometer
- Neznana tekočina
- Uteži z masami 10, 20 in 40 g
- Vernierov merilnik časovnih intervalov in vmesnik
- Termometer
- Računalnik in program Logger Pro za prikaz podatkov
- Kljunasto merilo

3 Meritve

Terminalna hitrost viskozometra je bila izmerjena za tri različne uteži, petkrat ali štirikrat za vsako utež. Pojemanje in pospeševanje, kot zapisano v teoretičnem uvodu, je bilo izmerjeno trikrat za vsako količino.

4 Izmerjeni podatki

Temperatura zraka je bila $T = (22,5 \pm 0,2)^\circ\text{C}$. Podatki viskozimetra so sledeči:

- notranji polmer zunanjega mirujočega valja $R_1 = (30,00 \pm 0,05)$ mm;
- zunanji premer vrtečega valja $R_2 = (34,70 \pm 0,05)$ mm;
- višina neznane tekočine med valjema $h = (22 \pm 2)$ mm;
- polmer koluta, okoli katerega je bila navita nit $r_g = (25,5 \pm 0,5)$ mm.

V tabeli 1 so podatki za terminalne kotne hitrosti pri različnih utežeh:

| $m_1 = (10 \pm 1) \text{ g}$ | $m_2 = (19 \pm 1) \text{ g}$ | $m_3 = (38 \pm 2) \text{ g}$ |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\omega_1 [\text{deg/s}]$ | $\omega_2 [\text{deg/s}]$ | $\omega_3 [\text{deg/s}]$ |
| 290,5 ± 14,8 | 676,4 ± 10,6 | 1224 ± 12 |
| 366,4 ± 12,5 | 674,5 ± 10,4 | 1239 ± 10 |
| 360,2 ± 11,3 | 671,8 ± 10,9 | 1222 ± 11 |
| 363,3 ± 8,6 | 652,0 ± 17,6 | 1227 ± 14 |
| | 671,1 ± 9,0 | 1235 ± 11 |

Tabela 1: Terminalne kotne hitrosti pri različnih utežeh

Tabela 2 pa prikazuje meritve kotnega pospeševanja in pojemanja, ko notranji valj ni bil v stiku z viskozno snovjo.

| $\alpha_{\text{pos}}[\text{deg/s}^2]$ | $\alpha_{\text{zav}}[\text{deg/s}^2]$ |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $438,8 \pm 4,4$ | $-177,3 \pm 5,0$ |
| $440,9 \pm 4,8$ | $-164,1 \pm 5,1$ |
| $439,1 \pm 4,2$ | $-164,6 \pm 3,8$ |

Tabela 2: Meritve kotnega pospeška in pojemka

5 Analiza podatkov

Najprej moramo izračunati povprečno kotno hitrost iz vseh meritev za vsako maso posebaj. K vsaki povprečni vrednosti pride prvi del napake, ki je kvadratno povprečje napak vsakega izmerka ter drugi del napake, ki se izračuna iz razpršenosti podatkov. Skupno napako da koren vsote kvadratov prve in druge napake. Preračunani podatki so v tabeli 3. Še preden pa se tega lotimo, pa lahko črtamo prvo meritev pri m_1 in četrto meritev pri m_2 , saj očitno izstopata.

| | m_1 | m_2 | m_3 |
|--------------------------------|-----------------|------------------|------------------|
| $\bar{\omega}[\text{deg/s}]$ | 363,3 | 673,4 | 1229,4 |
| $\Delta\omega_1[\text{deg/s}]$ | 1,8 | 1,3 | 3,3 |
| $\Delta\omega_2[\text{deg/s}]$ | 7,6 | 5,9 | 5,9 |
| $\omega[\text{deg/s}]$ | $363,3 \pm 7,8$ | $673,4 \pm 6,1$ | $1229,4 \pm 6,7$ |
| $\omega[\text{rad/s}]$ | $6,34 \pm 0,14$ | $11,75 \pm 0,11$ | $21,45 \pm 0,12$ |

Tabela 3: Izračun napak za kotne hitrosti

Sedaj je potrebno izračunati še faktor k . Z nekaj obračanja in preračunavanja med relativnimi in absolutnimi napakami ter pretvorbi v osnovne enote dobimo vrednost $k = (9,85 \pm 0,89) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Ko vstavimo izračunane količine v enačbo (1) in poračunamo napake, dobimo sledeče: $\eta(m_1) = (0,40 \pm 0,05) \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\eta(m_2) = (0,40 \pm 0,04) \text{ Pa}\cdot\text{s}$ in $\eta(m_3) = (0,45 \pm 0,05) \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Vrednosti za η bi morale biti neodvisne od mase uteži, vendar zaradi delovanja trenja temu ni tako.

Da bi popravili sistematično napako, ki je nastala zaradi trenja moramo izračunati, kolikošno sploh je trenje. Za to potrebujemo izmerjena pospešek in pojemek sistema, ki ni pomočen v merjeno tekočino. Izračun napake za ti dve količini sledi istemu postopku kot izračun napake za kotno hitrost in je prikazan v tabeli 4.

| | Pospešek | Pojemek |
|----------------------------------|-----------------|------------------|
| $\bar{\alpha}[\text{deg/s}^2]$ | 349,6 | -168,7 |
| $\Delta\alpha_1[\text{deg/s}^2]$ | 1,1 | 5,0 |
| $\Delta\alpha_2[\text{deg/s}^2]$ | 3,1 | 3,3 |
| $\alpha[\text{deg/s}^2]$ | $349,6 \pm 3,3$ | $-168,7 \pm 6,0$ |
| $\alpha[\text{rad/s}^2]$ | $7,67 \pm 0,06$ | $-2,94 \pm 0,10$ |

Tabela 4: Izračun napak za kotni pospešek in pojemek

Navor trenja izračunamo pomočjo enačbe (2): $M_t = (6,79 \pm 0,65) \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$. Popravljenе vrednosti viskoznosti izračinamo z enačbo (3). Vrednosti η pri različnih masah so podane v tabeli 5.

| | $\eta[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ |
|-------|--------------------------------|
| m_1 | $0,29 \pm 0,04$ |
| m_2 | $0,35 \pm 0,04$ |
| m_3 | $0,42 \pm 0,04$ |

Tabela 5: Izračuni viskoznosti pri različnih utežeh

Iz podatkov je lahko razbrati, da smo zaradi predpostavke o zanemarljivosti trenja dobili prevelike vrednosti viskoznosti. Vseeno pa je tudi ob upoštevanju trenja razvidno, da izračuni viskoznosti niso nujno neodvisni od mase uteži. Iz podatkov sledi, da je viskoznost $\eta = (0,35 \pm 0,08) \text{ Pa}\cdot\text{s}$, čeprav je resnična vrednost verjetno precej manjša.