



## Fizikalni praktikum I

### Poročilo

# Vaja 16: Vztrajnostni moment

Simon Bukovšek

Datum vaje: 6. december 2021

Datum oddaje poročila: 20. december 2021

## 1 Teoretični uvod

Newtonov zakon za vrtenje pravi, da je vsota navorov  $\sum M$  premo sorazmerna z kotnim pospeškom  $\alpha$ . Faktor sorazmernosti je vztrajnostni moment  $J$ .

$$\sum M_{z_{\text{un}}} = J\alpha$$

Vztrajnostni moment okrog težišča se izračuna kot:

$$J^* = \int_V \rho(r, \phi, z) r^2 dV,$$

če je os vtrenja v  $z$  smeri. Za objekte, ki se ne vrtijo okoli težišča, velja Steinerjev izrek:

$$J = J^* + mr^2,$$

kjer je  $m$  masa objekta in  $r$  razdalja od osi do težišča. Poglejmo si primer kolesa z vztrajnostnim momentom  $J$ , ki ga poganja utež z maso  $m$  navita z vrvico s polmerom  $r_j$ . Naj še deluje navor trenja  $M_{\text{tr}} = J\alpha_z$ . Enačba navorov je:

$$-M_{\text{tr}} + m(g - r_j\alpha)r_j = J\alpha \Rightarrow J = \frac{m(g - r_j\alpha)r_j}{\alpha + \alpha_z}.$$

Recimo sedaj, da imamo kolo z vztrajnostnim momentom  $J_0$ , na katerega sta najprej togo in potem vpeto vpeti dva valja, s polmeroma  $r_v$ , masama  $m_v$  na razdalji  $R$  od osi kolesa. Tedaj sta nova vztrajnostna momenta  $J_t$  in  $J_g$  enaka:

$$J_t = J_0 + 2m_v R^2 + m_v r_v^2 \quad \text{in} \quad J_g = J_0 + 2m_v R^2.$$

## 2 Pripomočki

- Kolo z navito vrvjo

- Optična vrata ter orodje za zajem podatkov Vrenier in Logger Pro
- Dva dodatna ploščata valja
- Različne mase uteži
- Meter

### 3 Meritve

Najprej smo izmerili pojemek kolesa brez uteži, da smo lahko določili pojemek samo zaradi trenja. Nato smo merili pospešek kolesa pri dveh različnih uzežeh, da smo izračunali vztrajnostni moment kolesa. Nato smo na kolo najprej prosto in potem togo vpeli dva ploščata valja in ponovno z dvema utežma merili kotni pospešek. Na koncu smo primerjali izračunana in izmerjena vztrajnostna momenta sistema z togo in prosto vpetima valjema.

### 4 Izmerjeni podatki

Za začetek nekaj geometrijskih podatkov. Polmer s katerim je bila vrvica z utežjo navita okoli kolesa je bil  $r_j = (2,020 \pm 0,005)$  cm, polmer valjev je bil  $r_v = (4,965 \pm 0,003)$  cm in oddaljenost od osi kolesa do osi valjev je bila  $R = (7,1 \pm 0,1)$  cm. Masa enega valja je bila  $m = (514,59 \pm 0,05)$  g, masa lažje in težje uteži pa  $m_1 = (50,18 \pm 0,05)$  g in  $m_2 = (144,35 \pm 0,05)$  g. Višina od uteži do tal je bila  $h = (77,5 \pm 0,2)$  cm.

Lasten pojemek kolesa samo zaradi navora trenja je bi izmerjen kot  $\alpha_z = (0,0866 \pm 0,0001)$  rad s<sup>-2</sup>. Meritve z obema utežma so podane v naslednji tabeli.

utež	$\alpha$ [s <sup>-2</sup> ] brez valjev	$\alpha$ [s <sup>-2</sup> ] z gibljivo vpetima valjema	$\alpha$ [s <sup>-2</sup> ] s togo vpetima valjema
$m_1$	$0,804 \pm 0,001$	$0,487 \pm 0,001$	$0,425 \pm 0,001$
$m_2$	$2,423 \pm 0,001$	$1,512 \pm 0,001$	$1,529 \pm 0,001$

### 5 Analiza podatkov

Najprej lahko po enačbi, ki smo jo podali v teoretičnem uvodu izračunamo vztrajnostni moment kolesa.

$$J_1 = \frac{(50,18 \pm 0,05) \text{ g} (9,81 \text{ m s}^{-2} - (2,020 \pm 0,005) \text{ cm} \cdot (0,804 \pm 0,001) \text{ s}^{-2}) \cdot (2,020 \pm 0,005) \text{ cm}}{(0,804 \pm 0,001) \text{ s}^{-2} + (0,0866 \pm 0,0001) \text{ s}^{-2}} = (11,15 \pm 0,02) \text{ g m}^2$$

$$J_2 = \frac{(144,35 \pm 0,05) \text{ g} (9,81 \text{ m s}^{-2} - (2,020 \pm 0,005) \text{ cm} \cdot (2,423 \pm 0,001) \text{ s}^{-2}) \cdot (2,020 \pm 0,005) \text{ cm}}{(2,423 \pm 0,001) \text{ s}^{-2} + (0,0866 \pm 0,0001) \text{ s}^{-2}} = (11,34 \pm 0,04) \text{ g m}^2$$

Povprečen  $J$  je tako  $(1,125 \pm 0,010) \cdot 10^{-2}$  kg m<sup>2</sup>. Vztrajnostni momenti so bili izračunani po obeh obrazcih iz teoretičnega uvoda. Naslednja tabela predstavlja izračunane in izmerjene vztrajnostne momente pri togo in gibljivo vpetih valjih.

meritev	$J$ [kg m <sup>2</sup> ] gibljivo vpetje	$J$ [kg m <sup>2</sup> ] togo vpetje
izmerjeno ( $m_1$ )	$(1,733 \pm 0,009) \cdot 10^{-2}$	$(2,005 \pm 0,027) \cdot 10^{-2}$
izmerjeno ( $m_2$ )	$(1,784 \pm 0,006) \cdot 10^{-2}$	$(1,765 \pm 0,012) \cdot 10^{-2}$
izračunano	$(1,643 \pm 0,025) \cdot 10^{-2}$	$(1,771 \pm 0,025) \cdot 10^{-2}$

Za konec si pogledjmo še ohranitev energije v primeru, ko ni pritrenjenih valjev. Na začetku je vsa energija shranjena v uteži  $W = mgh$ . Na koncu je enregija v vrtečem kolesu, kinetični energiji uteži in toploti:  $W = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m r_j^2 \omega^2 + M_{\text{tr}} \varphi$ . Izmerjena končna kotna hitrost je bila  $(7,7 \pm 0,1) \text{ s}^{-2}$  in zasuk  $(37 \pm 1)$  rad. Začetna energija je bila  $W_i = (0,382 \pm 0,001) \text{ J}$ , končna pa  $W_f = (0,370 \pm 0,013) \text{ J}$ . Začetna in končna energija se ujemata znotraj napake.